


FONDO PIZZOFALCONE



COURS

DE MÉCANIQUE.

PARIS. — TYPOGRAPHIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,
Rue Jacob, n° 56

COURS
DE MÉCANIQUE,

OU RÉSUMÉ DE LEÇONS

SUR LA DYNAMIQUE, LA STATIQUE,

ET LEURS APPLICATIONS

A L'ART DE L'INGÉNIEUR;



PAR

J. B. BELANGER,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES,
PROFESSEUR DE MÉCANIQUE A L'ÉCOLE ROYALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ET A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES.

PREMIÈRE PARTIE.

DYNAMIQUE ET STATIQUE GÉNÉRALES. — HYDROSTATIQUE.



PARIS,

CARILIAN GŒURY ET V. DALMONT,
Libr. des corps roy. des Ponts et Chaussées et des Mines,
QUAI DES AUGUSTINS, 39 ET 41.

L. MATHIAS (AUGUSTIN),
Librairie Scientifique-Industrielle,
QUAI MALAQUAI, 15.

1847.

AVANT-PROPOS.

Ce volume est le texte concis des leçons orales de Mécanique rationnelle données, depuis 1838, aux élèves de l'École centrale des arts et manufactures, dans leur première année d'étude, pour les préparer à l'enseignement qui concerne les développements de cette science et ses applications à l'art des constructions, à l'hydraulique, au calcul de l'effet des machines.

C'est la première partie d'un cours dont je compte publier les deux autres parties, ayant pour sujets la mécanique spéciale des corps solides ou flexibles, et l'hydraulique, dès que j'aurai pu mettre la dernière main aux feuilles lithographiées que j'ai, jusqu'à présent, rédigées pour l'usage exclusif de mes auditeurs.

Cette première partie traite des lois générales du mouvement et de l'équilibre des corps, relativement aux forces qui les sollicitent; elle expose les principales connaissances qui appartiennent à la dynamique, à la statique, à l'hydrostatique.

Un usage ancien et encore généralement suivi, est de commencer l'étude de la mécanique par la statique, ce qui a le grave inconvénient d'habituer les élèves à considérer les forces d'une manière trop abstraite, indépendamment des conditions de leur existence et de leurs effets. A cet égard une heureuse innovation a été réalisée par M. Poncelet, que ses savants et utiles travaux placent à la tête de l'école moderne de la mécanique industrielle. Dans un cours public fait en 1827 aux ouvriers et artistes de Metz, il a fondé son enseignement sur les

principes de la dynamique, tels qu'il les a exposés dans son *Introduction à la Mécanique industrielle, physique ou expérimentale*. M. Coriolis, esprit d'une rare sagacité, dont une santé débile et une mort prématurée ont malheureusement borné la carrière, a adopté le même ordre de déduction dans sa *Mécanique générale des corps solides*. Il y a conclu des lois du mouvement les conditions de l'équilibre considéré comme cas particulier.

Aidé des écrits, éclairé par les entretiens de ces savants ingénieurs, mes anciens camarades à l'École polytechnique et mes amis, j'ai imité leur exemple sans m'astreindre d'ailleurs à suivre entièrement ni l'une ni l'autre de leurs méthodes.

Je suppose à mes lecteurs plus d'instruction acquise en mathématiques que n'en avaient la plupart des auditeurs des cours publics de Metz, mais beaucoup moins que n'en exigent le Traité de mécanique de Coriolis et les autres ouvrages destinés aux élèves de l'École polytechnique. Je m'appuie fréquemment sur la trigonométrie, sur la théorie de l'expression des courbes par leurs équations, sur l'emploi des éléments du calcul différentiel et du calcul intégral; connaissances auxquelles il suffira d'avoir consacré préalablement quelques mois d'une étude attentive. On pourra les trouver enseignées dans le petit ouvrage que j'ai publié en 1842 sous le titre de *Résumé de leçons de géométrie analytique et de calcul infinitésimal*, et auquel je renvoie dans plusieurs endroits de celui-ci.

C'est sur cette base que je me suis efforcé d'asseoir une exposition claire et logique de la Mécanique rationnelle, qui, étudiée d'abord au point de vue purement théorique, doit ultérieurement servir de guide à la mécanique pratique ou industrielle. Dans cette étude, la rigueur mathématique n'est pas seulement un noble

exercice de l'intelligence ; je la crois utile surtout parce que des vérités non-démontrées sont, comme trop d'exemples le prouvent, sujettes à être bientôt oubliées ou faussement interprétées et mal appliquées.

Toute science a ses axiomes ou principes fondamentaux. J'ai cherché à mettre en relief ceux qui sont propres à la mécanique rationnelle, et qui se réduisent au nombre de trois, savoir : le principe de l'inertie (page 35 ci-après) ; le principe des mouvements relatifs (page 75) ; le principe de la réaction égale et contraire à l'action (page 179).

Le principe de l'inertie est étroitement lié à la notion de la force.

Le principe des mouvements relatifs conduit avec autant de rigueur que de facilité au théorème de la proportionnalité des forces et des accélérations qu'elles produisent sur le même corps, et au théorème de la composition des forces, connu sous le nom de parallélogramme des forces. Il est vrai que les auteurs démontrent cette proposition célèbre sans énoncer le principe dont je viens de parler ; mais ils sont obligés d'admettre formellement ou implicitement quelque axiome équivalent, tel que celui-ci : Lorsque plus de deux forces agissent simultanément sur un point matériel, la résultante de deux d'entre elles est la même que si les autres n'existaient pas.

Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction contraire permet de démontrer les théorèmes généraux du mouvement et de l'équilibre des corps quelconques, en considérant ceux-ci comme des assemblages d'éléments à chacun desquels s'appliquent les propositions préalablement établies et constituant la dynamique d'un point matériel.

Parmi les vérités que la science possède sur la méca-

nique rationnelle, et dont des ouvrages justement estimés conservent le dépôt, j'ai dû faire un choix conforme aux besoins des élèves auxquels je m'adressais. J'ai passé sous silence la théorie si intéressante d'ailleurs du mouvement elliptique des planètes, et les diverses questions qui se rapportent aux axes instantanés de rotation des corps solides libres. Mais je n'ai rien négligé de ce qui se rattache à la théorie du travail des forces, si importante par ses applications au calcul de l'effet des machines. J'ai montré que la quantité si bien nommée *travail* par MM. Coriolis et Poncelet, s'introduit de la manière la plus simple dans le calcul, lorsque, après avoir établi les deux équations du mouvement uniformément varié, qui expriment les relations entre la force, la vitesse variable, l'espace parcouru et le temps, on élimine cette dernière variable (page 88). Du reste j'ai cru convenable d'attendre que l'étude spéciale de la théorie des machines pût faire comprendre comment le travail des forces est, suivant l'expression de Navier, une sorte de *monnaie mécanique*. Jusque-là c'est une combinaison rationnelle d'une force avec le chemin que parcourt son point d'application, et avec l'angle des directions de la force et du chemin.

Pour être conséquent avec l'adoption du mot travail dans le sens précis qui lui est maintenant attribué en mécanique, j'ai remplacé par l'expression *travail virtuel* celle de *moment virtuel* employée par Lagrange, et qui ne désigne effectivement qu'un travail. J'ai réservé l'expression *moment d'une force* pour désigner, suivant l'usage le plus ordinaire, le produit de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à un axe par la distance de la force à l'axe, et j'ai fait remarquer que la considération de cette quantité dérive naturellement de celle du travail d'une force pendant le mouvement

de rotation de son point d'application autour d'un axe (page 67).

Un théorème général et fécond (pag. 184) montre le rôle que joue le produit d'une force par la durée de son action. J'ai jugé convenable de donner un nom à cette quantité pour fixer l'attention des élèves sur son importance. Il m'a paru que la désigner, comme on le fait quelquefois, par les mots *quantité de mouvement*, qui signifient proprement le produit de la masse d'un corps par sa vitesse, c'était s'exposer à confondre un effet avec sa cause : j'ai préféré le mot *impulsion*, dont je n'ai fait que préciser le sens en mécanique.

Une autre innovation que j'ai crue utile pour ceux qui commencent l'étude de la mécanique, c'est de supprimer l'expression *force vive* qui ne désigne pas une force, mais soit l'effet d'un travail, soit la capacité de produire un travail. J'ai dit (page 194) pourquoi je propose de nommer *puissance vive* la moitié de ce qu'on appelait autrefois force vive.

Je dois ajouter quelques mots sur l'objet de chacune des quatre sections de ce livre.

La première section est, pour ainsi dire, un dénombrement, une liste raisonnée des diverses quantités qui appartiennent spécialement à la mécanique, une exposition des propriétés numériques et géométriques qui résultent immédiatement de la seule définition de ces quantités. L'expérience de l'enseignement m'a appris qu'il était utile que ces détails, qui s'appuient exclusivement sur les notions élémentaires du temps et de la force, combinées avec celles de l'espace, fussent traités séparément des propositions de la dynamique, qui établissent les relations entre le mouvement et les forces. Peut-être trouvera-t-on de l'aridité dans l'étude de cette première section, et de la difficulté, sinon à compren-

dre, du moins à retenir les théorèmes et les formules qui la composent. J'engage dans ce cas les commençants à ne pas s'inquiéter des doutes qui pourront, à une première lecture, rester dans leur esprit, et à ne pas se croire obligés de savoir parfaitement toutes les propositions de la première section avant de passer outre. Mais chaque fois que, en étudiant la seconde section et ensuite la troisième, ils verront un appel fait aux définitions ou aux vérités précédemment établies; c'est alors qu'il sera nécessaire de recourir aux explications données sur celles-ci, et de se les approprier par une entière intelligence du sens des termes employés, et par une complète conviction des conséquences mathématiques qui en découlent.

La seconde section traite de la dynamique du point matériel, dans les divers cas du mouvement absolu rectiligne, du mouvement absolu curviligne et du mouvement relatif. Sur ce dernier point, je crois avoir réussi, par l'emploi de la méthode géométrique, à faciliter l'intelligence de la théorie que Coriolis, après l'avoir publiée dans le *Journal de l'École polytechnique*, cahiers XXI et XXIV, a reproduite dans sa *Mécanique des corps solides*, pages 40 et suiv., et qui est à mes yeux l'un de ses plus beaux titres au souvenir du monde savant.

La troisième section expose les théorèmes généraux du mouvement et de l'équilibre des corps quelconques. Elle se divise en deux chapitres relatifs, l'un à la dynamique, l'autre à la statique. Il n'y est question que des généralités de ces deux parties de la science, la suite du cours devant traiter de la statique des systèmes funiculaires, des systèmes solides articulés, du mouvement varié des corps solides assujettis à tourner autour d'axes fixes, et des éléments des machines eu égard au frottement

Enfin, la quatrième section a pour objet les connais-

sances les plus essentielles qui se rapportent à l'hydrostatique. J'y ai expliqué comment la propriété de l'égale pression en tous sens est une conséquence de l'absence de frottement qui caractérise la fluidité parfaite.

Dans l'intention de rendre simples et expressives les formules de la Mécanique, j'ai adopté plusieurs notations dont quelques-unes étaient déjà usitées, et d'autres sont nouvelles.

Les lettres F, F',... exprimant des forces, les notations F_x, F'_x,... qu'on doit lire et énoncer en disant F *indice* x, F' *indice* x, signifient les projections de ces forces sur un axe des x. De même v_x, v'_y, qu'il faut lire v *indice* x, v' *indice* y, expriment la projection de la vitesse v sur l'axe des x et celle de la vitesse v' sur l'axe des y. Une lettre est même quelquefois suivie de deux indices inférieurs; par exemple v_0 (v indice zéro) signifie une vitesse initiale, et v_{0x} (v indice zéro, indice x) signifie la projection de cette vitesse sur un axe des x.

La lettre $\mathfrak{T}$ remplace constamment le mot *travail*, et doit être lue comme si ce mot était écrit en toutes lettres. F désignant une force, la notation $\mathfrak{T}$F doit être lue *travail de* F, de même que les notations *log*, *sin*, *cos*, etc., se lisent en prononçant les mots entiers *logarithme*, *sinus*, *cosinus*, etc.

La lettre $\mathfrak{M}$ remplace toujours le mot *moment*. La notation $\mathfrak{M}_{0x}$F doit être lue comme s'il y avait *moment, par rapport à l'axe* Ox, *de la force* F.

La lettre $\sum$ remplace le mot *somme*. $\sum F_x$ signifie, par exemple, la somme des projections des forces F sur un axe des x, ces forces étant en nombre quelconque, et désignées spécialement par F', F'', F''', etc. Cette notation diffère du signe $\int$ en ce que celui-ci désigne une

somme d'éléments infiniment petits exprimés sous la forme différentielle.

La lettre g est exclusivement employée à désigner l'*accélération constante* due à la pesanteur. Quand on adopte le mètre et la seconde pour unités de longueur et de temps, cette quantité est, pour notre latitude, 9,8088. On verra à la page 83 pourquoi j'évite de dire que cette quantité est l'intensité de la pesanteur.

La lettre π désigne toujours le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

Chaque figure des planches placées à la fin du volume porte un numéro d'ordre et un renvoi, en chiffres plus petits, à l'article auquel cette figure s'applique.

COURS
DE MÉCANIQUE,

OU RÉSUMÉ DE LEÇONS

SUR LA DYNAMIQUE, LA STATIQUE,

ET LEURS APPLICATIONS A L'ART DE L'INGÉNIEUR.

INTRODUCTION.

DES DIVERSES BRANCHES DE LA MÉCANIQUE. BUT DE CET OUVRAGE.

La *Mécanique* (*), dans le sens le plus étendu de ce mot, est la science qui a en général pour objet les lois et les causes du *mouvement* des corps, et qui comprend en particulier l'étude des conditions de leur *équilibre*, c'est-à-dire, de leur repos en présence de plusieurs causes de mouvement qui se combattent.

Les vérités générales appartenant à cette science constituent la *Mécanique rationnelle*, ainsi nommée parce que les propositions qu'elle enseigne sont des conséquences que le *raisonnement* déduit rigoureusement d'un petit nombre de *notions* primitives et de *principes* ou lois simples de la nature; de sorte que ces principes une fois acceptés comme des axiomes, les énoncés de la Mécanique rationnelle sont des vérités mathématiques qui subsistent en tous lieux, en toutes circonstances, sans la moindre exception: ce sont en un mot des *théorèmes*. Toutefois, de même que la géométrie raisonne sur

(*) Ce mot vient du grec μηχανή *machine*. La science des machines n'est aujourd'hui qu'une partie de la Mécanique.

des figures que ne présentent jamais exactement les corps de la nature, de même la Mécanique rationnelle admet, dans plusieurs de ses théories, l'existence de corps jouissant de propriétés que des corps réels ne possèdent jamais complétement, et il doit être entendu que dans ce cas les propositions auxquelles la science arrive sont subordonnées aux hypothèses théoriques, et ne se vérifient qu'avec plus ou moins d'approximation dans le monde réel.

Dans l'ordre des études scientifiques, la Mécanique rationnelle vient immédiatement après les mathématiques pures. A la notion géométrique des positions successives d'un point mobile et des espaces linéaires qu'il parcourt, elle ajoute l'idée de la *mesure du temps;* et de cette combinaison résulte la *vitesse.* A la notion du volume des corps elle ajoute celle de leur *masse,* propriété en vertu de laquelle des corps différents, pour prendre le même mouvement, exigent des intensités différentes dans les causes de ce mouvement.

La Mécanique rationnelle se divise communément en deux parties : l'une est la *Statique*, qui traite spécialement des conditions de l'équilibre des corps ; l'autre est la *Dynamique* (*), qui traite des relations du mouvement avec ses causes appelées *forces.* Dans le Cours qui suit, les théorèmes de la Statique seront établis comme des conséquences des propositions essentielles de la Dynamique.

La Mécanique rationnelle est la base nécessaire de diverses sciences qu'on peut considérer comme des branches de la Mécanique prise dans son acception la plus générale : telles sont l'*Astronomie mathématique* ou mécanique céleste, certaines parties de la *Physique mathématique*, la théorie de *la Stabilité des constructions*, la *Théorie dynamique des machines*, l'*Hydraulique.* De ces cinq branches, les deux premières s'appuient sur les connaissances mathématiques les plus élevées, et semblent, autant par leur objet que par leur difficulté, réservées

(*) Ce mot vient du grec δύναμις, *force*, *puissance.* Les questions dans lesquelles on s'occupe du mouvement sans considérer les forces, appartiennent à la mécanique géométrique et non à la dynamique.



exclusivement à un petit nombre de savants. Il n'en est pas de même des trois autres, qui, en raison de leur utilité pratique, sont devenues, sous la dénomination collective de *Mécanique appliquée*, des parties essentielles de la *Science de l'ingénieur*, et qui, étant fondées sur des données expérimentales, et sur les propositions les plus faciles de la Mécanique rationnelle, n'exigent, avec l'aptitude pour le raisonnement mathématique, que des études comparativement peu étendues, surtout lorsqu'elles s'arrêtent aux faits les plus généraux.

La Mécanique appliquée, réduite aux trois parties que nous venons d'indiquer, diffère en plusieurs points très-importants de la *Mécanique usuelle* ou industrielle, qui est la connaissance des propriétés des machines et des procédés employés pour les construire. Nous allons expliquer succinctement cette différence.

Une machine est en général composée de plusieurs pièces, les unes fixes, les autres mobiles, dont la liaison est telle que, si l'on imprime à l'une de ces parties un certain mouvement, on produit par cela même des mouvements déterminés dans les autres pièces mobiles de l'appareil. Les effets de ce genre portent le nom de *transmission de mouvement*, et la connaissance des divers moyens employés pour les obtenir conduit à l'art d'exécuter, à l'aide d'un moteur sans intelligence, des opérations auxquelles l'adresse de la main la plus exercée pourrait quelquefois ne pas suffire. La partie de la Mécanique industrielle qui considère principalement dans les machines les relations auxquelles sont assujettis les mouvements divers de leurs parties, sans s'occuper de calculer les causes extérieures de ces mouvements, c'est-à-dire l'intensité du moteur et des résistances, pourrait s'appeler la *Mécanique géométrique*, parce que les procédés très-variés et souvent fort ingénieux qu'elle emploie sont fondés sur les règles de la géométrie. L'étude spéciale de ses nombreuses combinaisons n'appartient pas proprement à la Mécanique appliquée, qui n'exige que les notions les plus simples sur les transmissions de mouvement, pour fournir des exemples à la *Théorie dynamique des machines*. Nous appelons ainsi la science qui soumet au calcul les forces que les machines reçoivent ou exercent, soit dans leur mou-

vement, soit dans leur état d'équilibre, et qui sert de guide dans l'emploi des moteurs que la nature met à la disposition de l'industrie : sans elle, la Mécanique géométrique, dont la grande utilité est d'ailleurs incontestable, deviendrait souvent infructueuse.

Une autre partie de la Mécanique industrielle est relative à la *Construction des machines :* elle comprend l'étude des propriétés des matériaux, l'art de les assembler, et les règles propres à déterminer la figure et les dimensions de chaque pièce d'après sa fonction ; la théorie de la stabilité des constructions lui prête un très-utile secours, mais ne la constitue pas tout entière.

Enfin, la Mécanique industrielle embrasse, sous le nom de *Technologie mécanique*, les connaissances concernant les instruments dits *machines-outils*, qui, conduits par les appareils de transmission de mouvement convenables dans chaque cas, exécutent immédiatement les diverses opérations de l'industrie, y compris même la fabrication perfectionnée des machines. Telles sont les machines à presser, à percer, à laminer, à graver, à pulvériser, à filer, à tisser, etc., etc. Les objets dont s'occupe cette partie de la Mécanique industrielle sont le principal but auquel tendent les autres ; mais la science possède à leur égard peu de préceptes généraux, et ils appartiennent pour la plupart à l'enseignement descriptif et à l'expérience.

Cette rapide énumération suffit pour faire entrevoir la multitude des considérations théoriques, des faits, des procédés qui peuvent se ranger sous le titre général de la Mécanique.

Les leçons dont nous présentons le résumé ont pour sujet spécial la *Mécanique calculée de l'ingénieur :* elles énoncent et démontrent les vérités rigoureuses, les théorèmes généraux les plus importants de la *Mécanique rationnelle ;* elles exposent ensuite les méthodes approximatives qui constituent la *Mécanique appliquée*, et qui, avec l'aide des données de l'expérience, servent à résoudre par le calcul, au point de vue de la pratique, les questions relatives aux constructions fixes, aux machines et à l'hydraulique.

PREMIÈRE SECTION.

NOTIONS GÉNÉRALES. DÉFINITIONS DES QUANTITÉS QUI APPARTIENNENT SPÉCIALEMENT A LA MÉCANIQUE. PROPRIÉTÉS NUMÉRIQUES OU GÉOMÉTRIQUES DE CES QUANTITÉS.

CHAPITRE PREMIER.

DU MOUVEMENT CONSIDÉRÉ INDÉPENDAMMENT DE SES CAUSES.

§ Ier. *Du mouvement uniforme d'un point.*

1. Le mouvement d'un point, suivant une ligne droite ou courbe, est *uniforme* lorsque ce point parcourt dans le même sens des longueurs égales en des temps égaux, quelque petits que soient ces temps; d'où il suit que des portions quelconques de l'espace parcouru dans un même mouvement uniforme sont proportionnelles aux temps employés à les parcourir.

2. La notion du *temps* est une idée acquise par expérience, et tellement élémentaire qu'il est inutile de chercher à la définir.

Une portion quelconque du temps a un commencement et une fin, que nous appellerons, l'un, *instant initial*, l'autre, *instant final.* Ainsi, un *instant* est par rapport au temps ce qu'un point géométrique est par rapport à une ligne, et dans le langage précis de la mécanique l'instant n'a pas plus de durée que le point n'a de longueur.

3. D'après la définition du n° 1, si l'on nomme

e' une certaine portion de l'espace linéaire parcouru par le point dont il s'agit,

t' le temps écoulé pendant ce parcours,

e une autre portion quelconque d'espace parcouru par le même point,

t le temps écoulé pendant le parcours de l'espace e,
le mouvement du point considéré est uniforme, lorsqu'on a

$$\frac{e}{e'} = \frac{t}{t'} \quad \text{ou} \quad \frac{e}{t} = \frac{e'}{t'}.$$

La première de ces deux équations exprime l'égalité de deux nombres abstraits, indépendants du choix des unités d'espace et de temps : elle indique simplement que si le temps t est le double, le triple, le quadruple......, la moitié, le tiers, le quart....., les deux tiers, les trois quarts..... du temps t', l'espace linéaire e est aussi le double, le triple, etc., de l'espace e'. La deuxième équation ci-dessus exprime l'égalité de deux quantités dont l'énonciation numérique varie selon le choix des unités. Elle suppose au moins que les temps t et t' sont rapportés à une même unité, d'ailleurs quelconque, car on ne comprendrait pas, sans cette opération préalable, la signification des quotients $\frac{e}{t}$, $\frac{e'}{t'}$. D'ailleurs, la deuxième équation est *homogène* comme la première, c'est-à-dire que si elle est vérifiée pour certaines unités d'espace et de temps, elle le sera également quand on changera ces unités.

Si l'on désigne par a le quotient $\frac{e'}{t'}$, la propriété du mouvement uniforme se trouve exprimée par l'équation

$$\frac{e}{t} = a \quad \text{ou} \quad e = at,$$

dans laquelle a est une constante, tandis que e et t sont des variables.

La quantité a qui, pour un mouvement uniforme donné, dépend du choix de l'unité de temps, est, d'après la dernière formule, l'espace parcouru dans l'unité de temps, ou au moins celui qui serait parcouru dans l'unité de temps si le mouvement était suffisamment prolongé en restant toujours uniforme.

Cette quantité a ou $\frac{e}{t}$ s'appelle l'intensité ou la grandeur absolue de la *vitesse* du point considéré.

Ainsi *la vitesse dans le mouvement uniforme est mesurée en grandeur absolue par l'espace parcouru dans l'unité de temps,*

ou plus généralement par le quotient d'un des espaces parcourus divisé par l'expression numérique du temps employé à parcourir cet espace. Nous donnerons plus loin (9) une définition plus générale et plus complète de la vitesse.

4. L'expression numérique de la vitesse exige le choix des deux unités de temps et de longueur. L'unité de temps adoptée généralement dans les formules de la mécanique est la *seconde*, c'est-à-dire la 86400ième partie du jour moyen solaire. L'unité de longueur ou d'espace dont nous ferons usage dans les exemples sera le mètre. On exprime cette double convention en disant que la vitesse est calculée en *mètres par seconde*. Néanmoins, on se sert quelquefois d'expressions telles que celles-ci : vitesse de tant de pieds par minute, de tant de lieues par heure. Un mouvement uniforme étant défini sous une telle forme, il est aisé d'en conclure la vitesse en mètres par seconde. Par exemple, la vitesse d'une lieue (de 4 kilomètres) par heure et celle de 100 pieds anglais par minute reviennent en mètres par seconde, l'une à $\frac{4000}{3600} = 1 + \frac{1}{9}$, l'autre à $\frac{100 \times 0{,}3048}{60} = 0{,}508$ (*).

5. On conçoit que, pour définir le mouvement uniforme d'un point sur une ligne donnée, ce n'est pas assez de faire connaître l'intensité de sa vitesse ; mais il faut encore en exprimer le sens. Or il suffit d'avoir compris l'usage des signes algébriques dans l'expression de la position d'un point sur une ligne donnée (*Géom. anal.*, 3), pour étendre leur emploi à la détermination du sens de la vitesse, comme nous allons le faire en résolvant la question suivante.

Problème. *Connaissant* 1° *la position* M_0 *qu'occupe à un certain instant un point mobile sur une ligne déterminée* Os (fig. 1);

(*) Dans la navigation maritime l'unité de vitesse est le *nœud*. Le nombre de nœuds que *file* un vaisseau en mer est égal au nombre de milles géographiques qu'il parcourt en une heure. Le mille géographique est le tiers d'une lieue marine, ou un soixantième de degré terrestre : sa longueur est donc à peu près de 1852 mètres. Ainsi, un nœud répond à une vitesse de 1852^{m} par heure, ou de 0^{m},514 par seconde.

2° *La vitesse de ce point animé d'un mouvement uniforme;*

3° *Le sens de ce mouvement, soit de* M_0 *vers* s, *soit à l'opposé; il s'agit d'exprimer la position* M *du mobile après un certain temps écoulé depuis l'instant où il se trouvait en* M_0.

Pour le faire de la manière la plus générale, on nommera

t le temps écoulé à partir de l'instant où le mobile était en M_0 (*), *instant* qui est dit *initial* parce que c'est à lui que commence le temps désigné par t dans les calculs ;

s_0 (*) la distance du point M_0 à un point O, appelé *origine* des distances, et supposé connu sur la ligne Os; cette distance s_0 doit être comprise algébriquement, c'est-à-dire que c'est une *longueur affectée d'un signe* qui sera + ou —, selon qu'elle sera portée à partir de O dans le sens adopté pour positif, ou dans le sens contraire; le point M_0 que détermine la quantité s_0 s'appelle *position initiale* du point mobile, et par là il ne faut pas entendre que le mobile est parti de cette position, mais il faut entendre qu'il l'occupait au *commencement du temps t;*

V la vitesse du mobile, quantité constante, mais positive ou négative selon que le mobile marche dans le sens positif ou en sens contraire;

s la distance du mobile à l'origine O après le temps t, distance dont le signe fera connaître le sens dans lequel elle devra être portée.

Il est facile de voir qu'on aura

$$s = s_0 + Vt. \qquad [1]$$

Cette équation, dont on vérifiera aisément l'exactitude pour toutes les hypothèses possibles relatives aux valeurs et aux signes des quantités qui y entrent, s'appelle l'*équation du mouvement* du mobile considéré dans l'énoncé. C'est donc l'*équation générale du mouvement uniforme d'un point*, c'est-à-dire qu'elle s'applique à un cas quelconque, pourvu qu'on donne aux constantes s_0 et V les valeurs qui conviennent à ce cas.

6. Problème. *Connaissant les positions du mobile à deux instants donnés, et sachant d'ailleurs que son mouvement sur*

(*) Prononcez M *indice zéro*, S *indice zéro*.

une ligne connue est uniforme, trouver l'équation de ce mouvement.

L'équation cherchée est encore de la forme $s = s_0 + Vt$ [1]; mais les quantités constantes s_0 et V ne sont pas données immédiatement par l'énoncé de la question; il s'agit de les calculer. A cet effet, on prendra à volonté l'origine des distances et celle du temps.

s_1 et s_2 étant les distances à l'origine O, des deux positions connues,

t_1 et t_2 étant les temps écoulés depuis l'instant initial jusqu'aux instants qui correspondent à ces deux positions,

l'équation générale [1] ci-dessus doit être satisfaite quand on y substitue pour s et t, les valeurs simultanées s_1 et t_1, puis s_2 et t_2; on a donc deux équations pour calculer les inconnues s_0 et V, savoir :

$$s_1 = s_0 + Vt_1 \qquad \text{et} \qquad s_2 = s_0 + Vt_2,$$

d'où

$$V = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \qquad \text{et} \qquad s_0 = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{t_2 - t_1};$$

et l'équation du mouvement, c'est-à-dire celle qui donne la position du mobile à chaque instant, est obtenue en substituant ces expressions de V et de s_0 dans l'équation générale [1]. On a ainsi

$$s = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{t_2 - t_1} + \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}\, t.$$

Ce même mouvement serait également exprimé par l'équation

$$s - s_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}(t - t_1),$$

obtenue en éliminant d'abord s_0 par soustraction entre les deux équations $s = s_0 + Vt$, $s_1 = s_0 + Vt_1$, ce qui donne

$$s - s_1 = V(t - t_1);$$

puis en écrivant que cette dernière équation est satisfaite par les valeurs simultanées s_2 et t_2, d'où l'on conclut

$$V = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

qu'on substitue dans l'équation précédente. Mais dans la formule à laquelle on parvient ainsi, la distance initiale n'est plus en évidence (*).

§ 2. *Du mouvement varié d'un point.*

7. Lorsque le mouvement d'un point n'est pas uniforme, il est dit *varié*. Il est *périodiquement uniforme*, si certains espaces successifs égaux sont parcourus dans des temps égaux, sans que la même condition soit remplie par les parties de ces espaces. Exemples : l'aiguille d'une montre à secondes, la marche d'un animal, le mouvement d'un point à la circonférence d'une roue hydraulique dont les aubes reçoivent périodiquement le choc de l'eau motrice.

8. Le mouvement varié d'un point, sur la ligne droite ou courbe qu'il parcourt, est déterminé dès qu'on a pour chaque instant la relation entre la distance s du mobile à un point fixe de cette ligne, et le temps t écoulé à partir d'un instant initial. Cette relation peut en certains cas s'exprimer analytiquement par une équation qui s'appelle l'équation du mouvement du point considéré.

Quand on raisonne en général sur une telle équation, on l'exprime quelquefois par la notation

$$s = F(t), \qquad [2]$$

la lettre F désignant une *fonction* quelconque.

9. Il importe de bien comprendre ce qu'on entend par la *vitesse* d'un point à un instant déterminé dans le mouvement varié.

Soit M la position de ce point à un certain instant, et soit MN l'espace qu'il parcourt ensuite pendant un certain temps θ qu'on peut prendre assez petit pour que pendant tout ce temps le mobile s'éloigne constamment de la position M. Si l'on divise la longueur MN par l'expression numérique de θ,

(*) On remarquera l'analogie de cette question et de celle où l'on demande l'équation d'une droite passant par deux points donnés. (*Géom. anal.*, 92.)

le quotient $\frac{MN}{\theta}$ peut être appelé la *vitesse moyenne*, avec laquelle l'espace MN est décrit.

Or, si dans ce calcul on fait décroître indéfiniment θ, et, par conséquent, l'espace MN partant toujours du point M, le quotient $\frac{MN}{\theta}$ finira par tendre vers une limite déterminée. Cette limite est l'*intensité de la vitesse* du point mobile à l'instant où il occupe la position M; et cette intensité, affectée du signe qui convient au sens du mouvement, donne l'expression algébrique de la *vitesse*. C'est ce qu'on exprime d'une manière abrégée, en disant que *la vitesse d'un point en une position déterminée est le quotient de l'espace infiniment petit, positif ou négatif, qu'il décrit à partir de cette position, divisé par l'expression numérique du temps infiniment petit employé à le décrire.*

D'après cette définition, et d'après les notions élémentaires du *calcul différentiel* (*Géom. anal.*, 220), si l'équation du mouvement (8) est $s = F(t)$, et si l'on appelle v la vitesse à la fin du temps t, on a

$$v = \frac{ds}{dt} = F'(t), \qquad [3]$$

quantité positive ou négative, selon que le point marche à cet instant dans le sens positif des s, ou en sens contraire.

Rapprochons cette définition de celle qui a été donnée (3) pour la vitesse dans le mouvement uniforme. Quel que soit alors l'espace parcouru qu'on divise par la durée du parcours, le quotient est toujours le même; et, par conséquent, en appliquant à la vitesse, dans ce cas, la définition générale qui vient d'être donnée, on la trouvera égale à l'espace décrit dans chaque seconde. Mais, dans le mouvement varié, il faut bien voir que la vitesse n'est plus un espace réellement parcouru dans l'unité de temps. On peut la considérer comme l'espace qui *serait* décrit dans une seconde, si le mouvement qui a lieu pendant le temps infiniment petit, suivant ou précédant l'instant considéré, était prolongé uniformément pendant une seconde.

10. Une autre quantité importante en mécanique naît de la considération des valeurs successives d'une vitesse variable. Si v est la vitesse après le temps t, et $v + \Delta v$ la vitesse après le temps $t + \Delta t$, compté à partir du même instant initial, il en résulte que Δv, quantité positive ou négative, est l'accroissement algébrique que la vitesse a acquis pendant le temps Δt.

Le quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ *est l'accroissement moyen de la vitesse, par unité de temps, pendant le temps* Δt.

A mesure qu'on fait diminuer Δt, ce quotient approche autant qu'on veut d'une limite $\frac{dv}{dt}$, qui s'appelle l'*accélération par unité de temps*, ou simplement l'*accélération* (*) à l'instant considéré, c'est-à-dire à la fin du temps t.

Cette quantité $\frac{dv}{dt}$ peut, comme $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, être positive ou né-

---

(*) Quelques personnes disent *accélération de vitesse :* cette locution semble être un pléonasme, car le mot *accélération*, dans le sens vulgaire, signifie *augmentation de vitesse.* Dans le sens mathématique que nous adoptons l'accélération est une *variation de vitesse comparée au temps*, et cette variation est *positive* ou *négative.*

La quantité $\frac{dv}{dt}$ qui depuis quelques années a reçu le nom d'accélération, est appelée dans les traités de mécanique analytique *force accélératrice.* Ce terme a pour les commençants l'inconvénient de donner à un effet un nom qui convient à une cause; nous croyons qu'il importe de n'en point faire usage dans l'enseignement.

Si l'on suppose que l'équation du mouvement d'un point sur une ligne droite ou courbe, soit $s = F(t)$, on aura la vitesse $v = \frac{ds}{dt}$ et l'accélération $\frac{dv}{dt} = \frac{d.\frac{ds}{dt}}{dt}$. Cette dernière notation de la dérivée du second ordre de s par rapport à t se remplace ordinairement par celle-ci, $\frac{d^2s}{dt^2}$, qui ne signifie pas autre chose : nous ne nous en servirons pas dans cet ouvrage.

gative : elle est positive, si, pour un accroissement du temps aussi petit qu'on veut, la vitesse actuellement positive ou négative devient algébriquement plus grande, c'est-à-dire, s'approche de l'infini positif et s'éloigne de l'infini négatif; l'accélération est négative, si, au contraire, la vitesse devient algébriquement plus petite. Il est aisé de voir que lorsque la vitesse et l'accélération sont de même signe, le mouvement est *accéléré* dans le sens vulgaire de ce mot, et que, dans les cas contraires, il est *retardé.*

Ces considérations générales vont être éclaircies par des exemples.

11. 1er Exemple. *Mouvement uniformément varié.* Le mouvement d'un corps sphérique homogène abandonné à l'action de la pesanteur, et roulant sur un plan incliné, appartient au genre le plus simple de mouvement varié; l'expérience constate que si l'on compte l'espace parcouru et le temps écoulé à partir du point et de l'instant où le corps, d'abord en repos, est abandonné simplement à l'action de la pesanteur, l'espace variable, décrit par le centre de la sphère parallèlement au plan, est proportionnel au carré du temps. Ce mouvement peut donc être exprimé par la formule

$$e = bt^2.$$

Si l'espace est mesuré à partir d'un point O quelconque de la droite sur laquelle se meut le centre de la sphère, et si l'on commence à compter le temps à un instant différent de celui du départ, l'expression de la distance s du point mobile à l'origine O, après le temps t, est de la forme

$$s = s_0 + at + bt^2, \qquad [4]$$

qui convient encore, moyennant des signes convenables donnés aux constantes s_0, a, b, au cas où le corps, avant d'être abandonné à lui-même, reçoit d'un moteur quelconque un mouvement, soit ascendant, soit descendant, suivant la ligne de plus grande pente du plan incliné.

Il n'est pas question d'expliquer ici pourquoi l'équation ci-dessus a lieu; mais, en la regardant comme l'expression d'un

fait expérimental (*), il s'agit de faire comprendre, à l'aide de cet exemple, ce qu'on entend par la vitesse dans le mouvement varié ; et nous le ferons d'abord sans recourir au calcul différentiel.

Si l'on considère une valeur déterminée de t, on aura, par la formule $s = s_0 + at + bt^2$, la valeur correspondante de s, qui fait connaître la position du mobile à la fin de ce temps. Soit θ un petit temps écoulé à la suite du temps t, et soit s_1 la distance du mobile à l'origine des s, à la fin de cet accroissement du temps. On aura pour déterminer s_1 l'équation :

$$s_1 = s_0 + a(t+\theta) + b(t+\theta)^2;$$

la différence $s_1 - s$ sera l'espace décrit pendant le temps θ; son signe indiquera le sens du mouvement, et, en divisant cet espace par θ, on aura la vitesse moyenne pendant ce temps. Ainsi

$$\frac{s_1 - s}{\theta} = \text{vitesse moyenne} = a + 2bt + b\theta.$$

A mesure que θ diminue, cette quantité s'approche indéfiniment de $a + 2bt$, qui est par conséquent (9) la vitesse cherchée. C'est ce qui s'écrit ainsi :

$$v = a + 2bt.$$

On serait parvenu immédiatement à ce résultat par la formule $v = \frac{ds}{dt}$ appliquée à l'expression [4] de s en fonction du temps, suivant les règles les plus simples du calcul différentiel.

12. Quant à l'accroissement moyen de la vitesse, par unité de temps, pendant un temps Δt (10), on le trouvera au moyen de deux équations,

$$v = a + 2bt \quad \text{et} \quad v + \Delta v = a + 2b(t + \Delta t),$$

d'où
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = 2b.$$

(*) On le reconnaît en constatant que les distances s du mobile à un point fixe O, après des temps en progression arithmétique, forment une série dont les différences secondes sont égales, d'où il suit que s est une fonction du second degré de t. (*Géom. anal.*, 129.)

Cette quantité est constante ; par conséquent l'accélération $\frac{dv}{dt}$ est aussi constante dans ce cas, et égale à $2b$.

13. On conclut, de ce qui précède, 1° que dans le mouvement exprimé par l'équation $s = s_0 + at + bt^2$ la vitesse varie à chaque instant ;

2° Que sa valeur, quand le temps t commence, est a, quantité positive ou négative, qu'on appelle *vitesse initiale* et que nous désignerons souvent par v_0 ;

3° Que la vitesse s'accroît par unité de temps de la quantité $2b$ positive ou négative, mais constante, qui s'appelle *accélération constante*, et qui sera souvent désignée dans ce Cours par la lettre j.

14. La propriété d'accélération constante a fait nommer le mouvement dont il s'agit *mouvement uniformément varié.* Le mouvement uniformément varié est donc caractérisé par les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2, \\ v = v_0 + jt, \\ \frac{dv}{dt} = j, \end{array}\right\} \quad [5]$$

dans lesquelles chaque lettre a une signification dont il importe de se bien pénétrer, en se rappelant que s_0, v_0 et j sont des constantes positives ou négatives.

Les lecteurs feront bien de répéter sur la première de ces équations le calcul du n° 11, en donnant à s_0, v_0 et j des valeurs numériques, tantôt positives, tantôt négatives, et en se rendant compte graphiquement du mouvement.

15. Remarques. 1° Des trois équations ci-dessus, les deux dernières ont été déduites de la première. Réciproquement, on peut de la dernière conclure les deux autres, sauf les valeurs des constantes v_0 et s_0 qui restent arbitraires. En effet, en intégrant les deux membres de l'équation $dv = jdt$, à partir de $t = 0$, on a

$$v - v_0 = jt;$$

puis mettant pour v sa valeur $\frac{ds}{dt}$ dans cette dernière équation

qui devient

$$ds = v_0\, dt + jt\, dt,$$

et en intégrant, on obtient

$$s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} jt^2.$$

2° L'équation $v = v_0 + jt$ donne pour une certaine valeur de t, une valeur *nulle* à la vitesse v. Il faut bien remarquer qu'*une vitesse nulle n'est pas toujours la même chose que le repos.* Un point est en repos lorsque, pendant un certain temps fini, il occupe constamment la même position. Un point en mouvement a une vitesse nulle à un instant déterminé, lorsque la vitesse moyenne $\frac{MN}{\theta}$ pendant le temps θ, qui succède à cet instant, devient aussi petite qu'on veut à mesure qu'on fait décroître θ (*).

16. 2e Exemple. Mouvement non uniformément varié.

Soient AB, CD, EF, GH (*fig.* 2) *les positions successives d'une droite verticale mobile dont l'extrémité supérieure se meut d'un mouvement uniforme sur le cercle* ACEG. *L'intersection de cette droite avec une horizontale* Ox *se transporte donc alternativement de* O *en* N *et de* N *en* O. *On demande les équations du mouvement de ce point d'intersection* (**). Soient

---

(*) *Exercices. — Théorèmes à démontrer.*

1° Dans le mouvement uniformément varié, la vitesse moyenne pendant un certain temps (telle qu'elle est définie au n° 9), est la moyenne arithmétique des vitesses aux deux instants extrêmes de ce temps.

2° Dans le même mouvement, la vitesse à un instant quelconque est la vitesse moyenne du mobile pendant un temps dont le milieu est l'instant considéré.

3° Ces propriétés n'auraient pas lieu pour un autre mouvement varié, tel que celui qui serait caractérisé par l'équation $s = at^3$.

(**) Ce mouvement est à peu près celui du piston d'une machine à vapeur, lié par une bielle à une manivelle tournant uniformément, lorsque la bielle est assez longue, comparativement au bras de la manivelle, pour ne former jamais qu'un petit angle avec l'axe du cylindre à vapeur.

V la vitesse constante sur le cercle ;

r le rayon O'A de ce cercle;

CD une position quelconque de la verticale mobile, coupant en M l'horizontale Ox;

t le temps écoulé pendant que la verticale passe de AB en CD;

x la distance OM;

v la vitesse de l'intersection mobile M sur Ox.

On a d'abord $OM = AO' - LO'$ ou $x = r - r \cos AO'C$;

$$\text{angle } AO'C = \frac{Vt}{r}, \quad \text{d'où} \quad x = r\left(1 - \cos\frac{Vt}{r}\right).$$

La vitesse v ou $\frac{dx}{dt}$ s'obtient en différentiant cette fonction : on trouve (*Géom. anal.*, 235)

$$v = V \sin\frac{Vt}{r} \quad \text{ou} \quad v = V \sin AO'C.$$

La vitesse v est donc nulle quand la verticale mobile est en AO, ou en GH. Son maximum est V, et a lieu quand la verticale passe par O'. Elle devient négative quand l'extrémité supérieure de la droite mobile se trouve au-dessous du diamètre AG.

L'accélération $\frac{dv}{dt}$ déduite de l'expression ci-dessus de v, est

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V^2}{r}\cos\frac{Vt}{r}, \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{V^2}{r}\cos AO'C.$$

Cette quantité varie donc, en valeur absolue, entre $\frac{V^2}{r}$ et *zéro*. En rapprochant les deux formules qui donnent la vitesse v et l'accélération $\frac{dv}{dt}$, et en assignant à l'angle AO'C diverses valeurs successives, on se rendra compte de toutes les circonstances du mouvement du point M. Le tableau suivant présente un abrégé de cette discussion.

ANGLE AO'C.	VITESSE v sur Ox.	ACCÉLÉRATION $\frac{dv}{dt}$ sur Ox.	SIGNIFICATION DES FORMULES.
0°	0,000	$\frac{V^2}{r}$	La vitesse est nulle et va croître. L'accélération est à son maximum.
30	0,500 V	$0{,}866\ \frac{V^2}{r}$	La vitesse est positive et croissante, mais moins rapidement.
60	0,866 V	$0{,}500\ \frac{V^2}{r}$	Elle continue de croître, mais moins rapidement encore.
90	V	0,000	La vitesse est à son maximum; l'accélération est nulle.
120	0,866 V	$-\ 0{,}500\ \frac{V^2}{r}$	La vitesse décroît.
150	0,500 V	$-\ 0{,}866\ \frac{V^2}{r}$	Elle continue de décroître plus rapidement.
180	0,000	$-\ \frac{V^2}{r}$	Elle est nulle et va devenir négative; l'accélération négative est au maximum de valeur absolue.

Si l'on continue ce tableau en faisant croître l'angle AO'C depuis 180 jusqu'à 360°, on voit que la vitesse et l'accélération ont les mêmes valeurs absolues que précédemment, mais avec des signes contraires; ce qui doit être évidemment.

§ 3. *Représentation graphique du mouvement d'un point.*

17. Si l'on construit une courbe tellement située par rapport à deux axes, que ses coordonnées soient proportionnelles les unes aux temps écoulés t, les autres aux distances s du mobile à un point fixe (distances comptées sur la ligne parcourue); cette courbe est une image très-expressive du mouvement, quelque varié qu'il soit, même lorsqu'il est tantôt progressif et tantôt rétrograde.

18. Si le mouvement est uniforme, au lieu d'une courbe, on a une droite, dont l'inclinaison sur l'axe des temps dépend de la vitesse du mobile, et du rapport des longueurs adoptées pour représenter l'unité de temps et l'unité de distance.

Les lecteurs doivent s'exercer à tracer les diverses positions de la droite suivant les signes des quantités s_0 et V dans l'équation $s = s_0 + Vt$ [1] du n° 5.

19. Si le mouvement est uniformément varié, la courbe représentative du mouvement exprimé par l'équation

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2 \qquad [5]$$

est une parabole dont l'axe principal est parallèle à l'axe des espaces (*Géom. anal.*, 124).

Il est bon de faire quelques exercices graphiques relatifs aux diverses positions de la parabole suivant les signes de s_0, v_0 et j.

20. Dans un mouvement varié quelconque l'inclinaison (*) de la courbe représentative, en un point, sur l'axe des temps, donne la vitesse à l'instant correspondant: cela résulte, soit de la définition de la vitesse (9), soit de l'équation $v = \frac{ds}{dt}$. Cette inclinaison et la vitesse sont numériquement égales si les axes coordonnés sont rectangulaires, et si pour construire la courbe on a pris la même échelle pour les espaces et pour les temps, c'est-à-dire si la même longueur représente l'unité de distance, et l'unité de temps. Plus généralement, la vitesse à un instant s'obtient en menant par le point correspondant de la courbe une tangente à cette courbe, et en mesurant l'accroissement que l'ordonnée de la tangente prend pour un accroissement de l'abscisse égal à l'unité.

21. Dans les ingénieux appareils imaginés par M. Poncelet et réalisés par M. Morin pour ses expériences sur le frottement, un corps mobile trace lui-même une courbe représentative du mouvement. On se sert à cet effet, soit d'une surface cylindrique, soit d'une surface plane, tournant uniformément, l'une autour d'un axe parallèle aux arêtes du cylindre, l'autre autour d'un axe perpendiculaire au plan. Une pointe traçante attachée à un corps qui se meut en ligne droite suivant une loi quelconque, décrit sur la surface tournante une courbe qui

(*) On appelle, pour abréger, *inclinaison* d'une courbe sur un axe, la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente, au point considéré de la courbe, fait avec l'axe. (*Géom. anal.*, 220.)



fournit le moyen d'assigner les positions successives de la pointe à des instants dont les intervalles sont connus.

22. On peut encore obtenir une représentation quelconque du mouvement par une courbe dont les abscisses sont proportionnelles aux temps et les ordonnées proportionnelles aux vitesses. Supposons, pour plus de simplicité, les axes coordonnés rectangulaires, et parcourons les divers cas qui peuvent se présenter.

Si le mouvement est uniforme, on a une droite parallèle à l'axe des temps; sa distance à cet axe est la vitesse constante; et puisque dans le mouvement uniforme l'espace décrit est égal au produit de la vitesse par le temps (3), l'aire rectangulaire comprise entre cette droite, l'axe et deux coordonnées correspondantes à deux instants déterminés, représente l'espace parcouru par le mobile entre ces deux instants, pourvu que l'on convienne que l'unité de cet espace *linéaire* est représentée par l'*aire* du rectangle qui aurait pour côtés les lignes choisies pour représenter l'unité des temps sur l'axe des abscisses, et l'unité des vitesses portées en ordonnées.

23. Si le mouvement est uniformément varié, la ligne qu'on obtient dans ce second mode de représentation est encore droite, puisque la vitesse croît proportionnellement au temps.

L'ordonnée à l'origine est la vitesse initiale; l'inclinaison de la droite sur l'axe des temps est numériquement égale à l'accélération, pourvu que la même longueur représente l'unité de temps et l'unité de vitesse. Plus généralement, l'accélération est représentée par l'accroissement de l'ordonnée, répondant à un accroissement de l'abscisse égal à l'unité. La distance qui sépare les positions du point mobile prises à deux instants quelconques, est représentée par l'aire comprise entre la droite inclinée, l'axe des temps, et les deux ordonnées relatives aux deux instants considérés, pourvu que, si la vitesse entre ces deux instants a changé de signe en passant par zéro, on prenne positivement l'aire située au-dessus de l'axe des temps, et négativement celle qui se trouve au-dessous.

Ces considérations géométriques peuvent servir à démontrer que lorsque la vitesse est donnée par la formule

$$v = v_0 + jt,$$

la distance du mobile, après le temps t, à sa position initiale, est

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} j t^2,$$

quels que soient les signes de v_0 et de j. Nous ne donnons pas ici cette démonstration, parce que la proposition a été établie précédemment (11 et 15) par le calcul.

24. Si le mouvement est varié d'une manière quelconque, la suite des points dont les abscisses sont proportionnelles aux temps et les ordonnées proportionnelles aux vitesses est une courbe. L'aire entre deux ordonnées est encore la représentation de la distance qui sépare les positions occupées successivement par le point mobile aux deux instants correspondants à ces deux ordonnées. Cette distance est l'espace parcouru entre les deux instants considérés si l'aire qui la représente est d'un même côté de l'axe des temps. On peut considérer une partie infiniment petite de la courbe comme une ligne droite; dans la durée infiniment petite correspondante, le mouvement peut être pris pour uniformément varié, et son accélération $\frac{dv}{dt}$ est représentée par l'inclinaison de la courbe ou de sa tangente (10), eu égard aux unités des abscisses et des ordonnées, comme nous venons de l'expliquer.

25. Exercice. Étant donnée la représentation graphique d'un mouvement, suivant le mode indiqué au n° 17, en conclure la représentation du même mouvement suivant le n° 22, et réciproquement.

§ 4. *De l'expression analytique du mouvement d'un point dans l'espace.*

26. D'après les propriétés connues des coordonnées relatives à trois axes ayant une origine commune, il est clair que si les coordonnées x, y, z, d'un point mobile sont données, chacune en fonction du temps t, sa position est déterminée à chaque instant. Ces coordonnées, portées sur les trois axes, y donnent les projections conjuguées du point mobile, c'est-à-dire

les intersections qu'on obtiendrait sur ces axes, en faisant passer par ce point, à l'instant où finit le temps t, trois plans parallèles aux plans coordonnés (*Géom. anal.*, 18).

27. En éliminant t entre les trois équations qui établissent les relations de x, y, z et t, on a les équations de la courbe décrite, puisqu'elles doivent être satisfaites par les coordonnées x, y, z, du point mobile dans une position quelconque.

Exemple. *Courbe plane dans le plan des* xy. Supposons que le mouvement de la projection P sur l'axe des x soit uniforme, et que celui de la projection Q sur la droite Oy soit uniformément varié; prenons l'origine O des axes au point où passe le mobile quand le temps t commence. Nous avons (3 et 11) :

$$x = at \qquad \text{et} \qquad y = bt + ct^2,$$

d'où

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{c}{a^2}x^2,$$

équation d'une parabole dont l'axe principal est parallèle à la droite Oy (*Géom. anal.*, 124).

28. Les expressions de x, y et z, en fonction de t, font connaître le mouvement de chaque projection du mobile sur les axes des x, des y et des z. Les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont les vitesses de ces projections. Or, ces vitesses ont, avec la vitesse du point dans l'espace, une relation facile à apercevoir :

Théorème. *La vitesse de la projection, sur un axe, d'un point en mouvement dans l'espace, est égale à la projection sur le même axe de la vitesse de ce mobile.*

Démonstration. 1° Si le mouvement du point considéré, dans l'espace, est rectiligne et uniforme, sa vitesse est l'espace MN qu'il décrit dans l'unité de temps, et si P et Q (*fig.* 3) sont les projections des points M et N, faites sur un axe Ox par des lignes MP, NQ parallèles à un plan coordonné yOz, la distance PQ est la *projection de la vitesse* MN. Or cette distance étant parcourue, pendant l'unité de temps, par la projection du mobile sur l'axe Ox, est aussi *la vitesse de la projection* de ce point.

2° Si le mouvement considéré est curviligne, soient

M (*fig.* 3) la position actuelle du mobile;

M_0MM' la courbe qu'il décrit;

MN une tangente dirigée dans le sens du mouvement, et d'une longueur égale à la vitesse.

C'est la projection de MN sur un axe quelconque, par exemple PQ sur Ox, qui s'appelle la projection de la vitesse sur cet axe. Nous représenterons cette quantité par v_x (prononcez v indice x). Quant à la vitesse de la projection, son expression analytique (9) est $\frac{dx}{dt}$. Il s'agit donc de démontrer l'égalité $v_x = \frac{dx}{dt}$.

Soit MM_1 l'arc infiniment petit ds parcouru suivant la tangente dans le temps dt, et soit P_1 la projection de M_1 sur Ox, de sorte que PP_1 est dx. Les droites MP, M_1P_1, NQ sont dans trois plans parallèles à un même plan yOx; donc on a

$$PP_1 : MM_1 :: PQ : MN,$$

ou bien
$$dx : ds :: v_x : v \quad ,$$

d'où, en divisant les deux premiers termes par dt, puis remplaçant $\frac{ds}{dt}$ par v, on conclut $\frac{dx}{dt} = v_x$; ce qu'il fallait démontrer.

Il est bien entendu que v_x est positive ou négative, et a le même signe que dx, attendu que dt est toujours pris positif, dans le sens de la marche du temps.

29. Corollaire. La vitesse du mobile dans l'espace est la diagonale d'un parallélipipède dont les arêtes contiguës sont égales et parallèles aux vitesses des projections du mobile sur trois axes coordonnés.

30. La notation v_x n'a une signification complétement déterminée qu'autant que l'on connaît la direction du plan yOz coordonné avec l'axe Ox.

Lorsqu'il s'agit de projections orthogonales, on a

$$v_x = v\cos(v, x), \quad v_y = v\cos(v, y), \quad v_z = v\cos(v, z),$$

et
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (\textit{Géom. anal.}, 47.)$$

Dans ces formules, v n'a point de signe; v_x, v_y, v_z ont ceux

des cosinus, qui dépendent eux-mêmes du sens du mouvement sur la courbe décrite dans l'espace.

31. Si la courbe décrite est dans le plan des deux axes Ox, Oy, l'angle xOy étant quelconque, en remarquant que la vitesse v forme, avec deux droites égales et parallèles à v_x et v_y, un triangle dont l'angle opposé à v est supplément de xOy, on a, d'après les théorèmes connus de la trigonométrie (*Géom. anal.*, 67 et 65),

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + 2v_xv_y \cos(xOy)},$$

$$\frac{v}{\sin(x,y)} = \frac{v_x}{\sin(v,y)} = \frac{v_y}{\sin(v,x)};$$

et si l'angle (x, y) est droit,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad v_x = v \cos(v,x), \quad v_y = v \cos(v,y).$$

32. Exemples. Dans l'exemple du n° 16, le point M est la projection du point C sur l'axe Ox; ce qui donne immédiatement

$$\frac{dx}{dt} = V \cos(V,x) = V \sin AO'C.$$

Dans l'exemple du n° 27, si l'on demande la vitesse du mobile après le temps t, on a

$$v_x = a, \quad v_y = b + 2ct \quad \text{et} \quad v = \sqrt{a^2 + (b + 2ct)^2}.$$

33. Il est à remarquer que le théorème du n° 28 ne s'applique pas aux accélérations; c'est-à-dire que, dans le mouvement curviligne, l'accélération $\frac{dv_x}{dt}$ de la projection du point mobile sur un axe des x, n'est pas égale à la projection sur cet axe de l'accélération $\frac{dv}{dt}$, comptée suivant la direction de la tangente à la courbe décrite (*). Ainsi, par exemple, dans le

(*) La raison de ce fait se reconnaît en remarquant que dans le cas de la projection orthogonale, par exemple, on a $v_x = v \cos(v,x)$; qu'ainsi v_x est le produit de deux facteurs *variables*, si le mouvement est curviligne. La différentiation donne

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt} \cos(v,x) + v.\frac{d \cos(v,x)}{dt},$$

et non pas seulement $\frac{dv}{dt} \cos(v,x)$.

cas du n° 16, l'accélération du mobile sur le cercle ACE.... est nulle, tandis que l'accélération de la projection M est la quantité variable $\frac{V^2}{r} \cos \frac{Vt}{r}$.

§ 5. *De la vitesse d'un point relativement à un système géométrique solide en mouvement.*

34. Définition du mouvement relatif. Un point M ayant un mouvement quelconque, concevons que trois axes coordonnés, formant un angle trièdre de figure invariable, se meuvent aussi d'une manière quelconque dans l'espace, et supposons qu'un observateur, entraîné, à son insu, dans le mouvement de ces axes, les considère comme fixes (c'est ce qui nous arrive continuellement dans les questions de Mécanique, où nous faisons abstraction du mouvement de la terre). Cet observateur attribuera au point M un mouvement différent de celui que ce mobile possède réellement : ce mouvement s'appelle mouvement *relatif*. Il est complétement défini dès que l'on connaît, en fonction du temps, les coordonnées du point dont il s'agit dans le système des trois axes mobiles, ou des trois plans de comparaison que ces axes déterminent.

Le mouvement d'un point relativement à un système solide d'axes mobiles est donc ce que deviendrait le mouvement réel ou absolu d'un point qui aurait à chaque instant les mêmes coordonnées que le premier, par rapport à un système d'axes semblable, mais en repos.

35. De la vitesse relative. La vitesse relative, qui est celle du mouvement relatif, est en général différente en intensité et en direction de la vitesse absolue. Cette considération conduit à la question suivante.

Problème. *Déterminer les relations entre la vitesse relative, la vitesse absolue et le mouvement des axes mobiles de comparaison.*

Soit, à un instant déterminé, A la position du point mobile (*fig.* 4), et soit $AV = v$ une droite représentant en direction et en intensité sa vitesse absolue;

Soit AE la direction suivant laquelle le point A considéré comme point géométrique lié aux axes mobiles de comparai-

son, est entraîné dans leur mouvement; et soit v_e la vitesse actuelle de ce point géométrique. Son mouvement est appelé par Coriolis *mouvement d'entraînement*, dénomination expressive que rappelle la notation v_e.

Dans un temps infiniment petit dt, le mobile sera réellement transporté en M sur AV à une distance $AM = vdt$; tandis que le point géométrique A lié aux axes sera entraîné en A' à une distance $AA' = v_e dt$; donc l'observateur qui, étant emporté avec les axes, considérera le point A comme fixe, attribuera au mobile un mouvement en vertu duquel ce corps parcourrait un espace infiniment petit égal à A'M, dans le temps dt. Donc, si l'on désigne par v_r la vitesse relative, on aura $A'M = v_r dt$: les côtés du triangle AMA' sont donc proportionnels aux vitesses v, v_e, v_r.

Donc si l'on construit un triangle AVE dont deux côtés représentent, pour l'intensité et la direction, l'un la vitesse absolue, l'autre la vitesse d'entraînement, le troisième côté représente l'intensité de la vitesse relative.

36. Si l'on considère comme liée aux axes mobiles de comparaison la droite A'R' prolongement de l'élément A'M, on remarquera qu'à l'instant initial du temps dt elle occupait une position AR qui ne peut faire avec A'R' qu'un angle infiniment petit. Or cette droite est la direction de la vitesse apparente du mobile pour l'observateur qui ne tient pas compte du mouvement des axes; donc elle est la direction de la vitesse relative.

Quand il s'agit d'exprimer la direction d'une droite, un angle infiniment petit doit être négligé : donc la droite parallèle au troisième côté du triangle AA'M est la direction de la vitesse relative.

37. En achevant le parallélogramme AEVR dans lequel on a $AR = VE = v_r$, on arrive à cette proposition qui résume celles des deux numéros précédents :

Théorème. *La vitesse absolue est représentée en grandeur et en direction par la diagonale d'un parallélogramme dont deux côtés contigus représentent de même, l'un la vitesse d'entraînement, l'autre la vitesse relative.*

38. La diagonale AV partant du point commun A des deux côtés contigus AE, AR, d'un parallélogramme, s'appelle la *résultante* des deux droites AE, AR, que l'on nomme ses *composantes*. On peut donc énoncer le théorème précédent en disant que

La vitesse absolue est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement; ou que *celles-ci sont ses composantes.*

On peut encore dire, d'après l'inspection de la figure, que

La vitesse relative AR *est la résultante de la vitesse absolue* AV, *et d'une vitesse* Ae *égale et opposée à la vitesse d'entraînement* AE.

39. Lorsque la vitesse d'entraînement et la vitesse relative sont parallèles, la vitesse absolue est égale à leur somme ou à leur différence, selon qu'elles sont de même sens ou de sens contraires; en général, elle est égale à leur somme algébrique, en donnant à chaque vitesse le signe qui convient au sens de sa direction.

40. Exemple. Un cylindre ayant son mouvement de rotation connu autour de son axe projeté en O (*fig.* 5), on suppose qu'un point mobile pénètre en A dans ce cylindre avec une vitesse absolue représentée en grandeur et en direction par AM, tandis que la vitesse du point A considéré comme appartenant au cylindre est représentée par la tangente AA'. En achevant le parallélogramme AA'MB, on obtient la droite AB représentant la vitesse relative avec laquelle le mobile pénètre au premier instant dans le cylindre; sa direction est celle qu'il faudrait donner au premier élément d'un tuyau droit ou courbe qui adhérerait au cylindre, et dans lequel on voudrait que le mobile s'introduisît sans choc. Cette théorie est applicable aux roues hydrauliques.

41. Un point ayant une certaine vitesse relativement à des axes mobiles, ceux-ci peuvent avoir eux-mêmes un certain mouvement relativement à d'autres axes également mobiles: c'est ainsi qu'on arrive à considérer une vitesse comme la résultante d'autant de composantes qu'on veut.

Pour le faire comprendre, posons un exemple de trois vitesses composantes. Un boulet est lancé d'un point de la terre

avec une vitesse apparente V′ dans une direction quelconque; le point de départ considéré comme lié à la terre possède une vitesse V″ due au mouvement de rotation du globe par rapport à l'axe des pôles et à deux autres droites qui passant par cet axe se transportent parallèlement à elles-mêmes; enfin le même point de départ considéré comme lié à ces deux droites et à l'axe terrestre participe à leur mouvement de translation curviligne autour du soleil, mouvement qui a lieu avec une vitesse V‴ que nous supposerons absolue en n'ayant pas égard au déplacement du soleil. Il est clair que le point de départ a une vitesse absolue qui est la résultante des vitesses V‴ et V″, représentée par la diagonale AC′ (*fig.* 6) du parallélogramme ABC′C construit sur les droites AB, AC représentant ces vitesses. Cette résultante est la vitesse d'entraînement du point A, et la vitesse absolue du boulet est la résultante AD′ de AC′ et de V′ représentée par AD.

En généralisant ces remarques, et en considérant la fig. 6, on verra facilement *que la résultante d'un nombre quelconque de vitesses est représentée pour la grandeur et la direction par la droite* AD′ *fermant un polygone* ABC′D′.... *qui, partant de la position du mobile, a ses côtés* AB, BC′, C′D′,.. *égaux et parallèles en même sens aux droites* AB, AC, AD,.. *qui représentent les vitesses composantes* (*).

42. Imprimer par la pensée à un point matériel une vitesse additionnelle à celle qu'il possède, c'est substituer, par le raisonnement, à la vitesse existante une autre vitesse qui est la résultante de celle-ci et de celle qu'on ajoute. On ne change rien au mouvement relatif d'un point dans un système solide d'axes de comparaison, en imprimant par la pensée des vitesses additionnelles égales, parallèles et de même sens, au mobile

(*) On dit quelquefois qu'un point est animé simultanément de plusieurs vitesses, ou possède à la fois plusieurs mouvements. Ce langage ne peut être entendu dans le sens rigoureux; car, à un instant donné, un point n'a qu'un certain mouvement absolu. C'est dans la considération des mouvements relatifs qu'on trouve la véritable interprétation de cette manière de parler.

considéré dans son mouvement absolu, et au système des axes mobiles; car c'est joindre aux composantes AV, A*e* de la vitesse relative AR deux autres composantes égales et opposées qui se détruisent.

§ 6. *Des divers mouvements d'un système solide.*

43. Après avoir traité du mouvement d'un point unique, nous considérons un système de points dont les distances sont invariables, comme ceux des figures de la géométrie; et supposant ce système en mouvement, nous allons examiner les relations auxquelles sont assujetties les vitesses de ses différents points.

Nous ferons usage de cette remarque bien facile à vérifier, que si l'on assigne à trois points quelconques non en ligne droite de ce système solide, un des mouvements qu'ils peuvent prendre, le mouvement de chacun des autres points du système est déterminé comme une conséquence nécessaire.

1° Mouvement commun de translation curviligne ou rectiligne.

44. Le mouvement d'un système de points est appelé *mouvement commun de translation*, lorsque tous ces points possèdent à chaque instant des vitesses égales, parallèles et de même sens, ces vitesses pouvant d'ailleurs varier ensemble, avec le temps, d'intensité et de direction.

Il résulte de cette définition

1° Que tous les points du système décrivent des courbes égales (superposables);

2° Qu'ils conservent entre eux leurs distances invariables;

3° Que, dans deux positions successives quelconques du système, les droites égales qui joignent les mêmes points mobiles de ce système sont parallèles.

45. Dans le cas particulier où les vitesses égales conservent une direction constante, le système a un *mouvement commun de translation rectiligne.*

46. Il suffit que trois points non en ligne droite d'un système solide aient un mouvement commun de translation pour qu'il en soit de même de tous les autres points (43).

2° Mouvement simple de rotation autour d'un axe fixe.

47. Lorsque trois points non en ligne droite d'un système solide en mouvement conservent invariablement leurs distances à deux points fixes, il en est de même de tous les autres points du système, et l'on dit qu'il *tourne autour de l'axe fixe* déterminé par les deux points fixes, ou qu'il a un *mouvement simple de rotation autour de cet axe.*

Dans ce cas, tous les points du système se meuvent dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation; ils y décrivent en un même temps des arcs d'un même nombre de degrés, et par conséquent proportionnels aux distances de ces points à l'axe fixe.

L'arc décrit pendant un certain temps par un point qui étant lié invariablement au système serait à l'unité de distance (à un mètre) de l'axe, s'appelle *le déplacement angulaire* du système dans le temps considéré.

Si σ représente cet arc, et que r soit la distance d'un point du système à l'axe, l'arc s décrit par ce point dans le même temps est σr. Ainsi

$$s = \sigma r. \qquad [6]$$

48. Les vitesses des différents points du système sont, par la même raison, proportionnelles aux distances de ces points à l'axe.

La vitesse, à un instant quelconque, d'un point lié au système et situé à une distance de l'axe égale à l'unité, s'appelle la *vitesse angulaire* du système à cet instant. Son expression d'après la notation précédente est $\frac{d\sigma}{dt}$. Si on la représente par ω, la vitesse v d'un point situé à la distance r de l'axe est ωr.

Ainsi $$v = \omega r. \qquad [7]$$

49. L'accélération du mouvement du point situé à l'unité de distance de l'axe s'appelle *l'accélération angulaire* du système. Son expression est $\frac{d\omega}{dt}$. L'accélération $\frac{dv}{dt}$ du point

situé à la distance r de l'axe est, d'après l'équation [7], $r\frac{d\omega}{dt}$. Ainsi

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}. \quad [8]$$

3° Mouvement de roulement.

50. Imaginons qu'un système solide soit invariablement attaché à une surface cylindrique, à base quelconque, qui roule sans glisser sur une autre surface cylindrique supposée fixe. Chaque point du système décrit une courbe plane qui se nomme *épicycloïde* lorsque les deux cylindres sont à bases circulaires, et *cycloïde* lorsque le cylindre fixe est remplacé par un plan; dans ce dernier cas, les points situés sur l'axe de figure du cylindre mobile décrivent des lignes droites.

Quelles que soient les bases des cylindres, la relation qui lie entre elles les vitesses des différents points du système mobile, à un même instant, est facile à apercevoir.

En effet, remplaçons le cylindre mobile par un prisme inscrit à faces très-étroites. Les courbes décrites dans ce cas par les points du système seront des arcs dont les normales coupent l'arête actuellement située sur le cylindre fixe, et les vitesses de ces divers points seront proportionnelles à leurs distances à cette arête. Ces deux propriétés étant indépendantes de la largeur des faces du prisme, subsistent par conséquent à la limite, c'est-à-dire, dans le cas du cylindre. Donc *les directions et les rapports des vitesses sont les mêmes que si l'arête de contact des deux cylindres était fixe.*

Cette arête, dont la vitesse est nulle à l'instant du contact, s'appelle *axe instantané de rotation.*

51. Remarques. 1° En réalité, l'arête de contact des deux cylindres à l'instant considéré, n'est pas fixe, parce qu'on ne pourrait pas assigner une durée véritable à sa situation sur le cylindre fixe; mais sa vitesse est nulle, ce qui est différent, comme on l'a vu (15).

2° Les arcs décrits même pendant des temps très-courts ne sont pas des arcs de cercles, mais des courbes analogues à la cycloïde.

3° *Le centre de courbure* (*Géom. anal.*, 260) en un point donné de l'une de ces courbes, n'est pas, comme on pourrait le croire, sur l'axe instantané de rotation correspondant.

Pour vérifier ce fait, prenons le cas le plus simple, celui de la cycloïde proprement dite (*Géom. anal.*, 143); supposons donc une surface cylindrique à base circulaire roulant sur un plan fixe, et considérons la courbe que décrit un de ses points. Soient M ce point (*fig.* 7), AML la position correspondante du cercle générateur, TL la tangente sur laquelle il roule. ML est la direction de la normale en M (*Géom. anal.*, 219). Pour avoir un autre point M′ de la même cycloïde, il suffit de prendre un second point N sur le cercle AML, et de tracer NM′ parallèle à TL et égale à l'arc MN rectifié. Si l'on fait aussi LL′ = MN, la direction M′L′ sera celle de la normale en M′. Cela posé, que l'on prolonge MN jusqu'en T et que l'on mène MPP′ parallèle à TL; on verra que, à mesure que MN diminue, le triangle NMP semblable à NTL approche de devenir isocèle; donc, à la limite, MP = MN = NM′ = PP′; donc MP′ approche d'être double de LL′; donc, à la limite, la distance MC de M à l'intersection C des deux normales voisines ML, M′L′ est double de ML. Or, cette distance MC est le rayon de courbure, et le point C le centre de courbure de la cycloïde au point M (*Géom. anal.*, 260). Ainsi, *dans le cas de la cycloïde simple, le rayon de courbure pour un point* M *est double de la distance de ce point au point de contact situé sur l'axe instantané de rotation.*

52. Les mêmes considérations s'appliqueraient à un système solide invariablement lié à une surface conique roulant sans glisser sur un plan ou sur une autre surface conique fixe qui aurait même sommet. A un instant quelconque du mouvement, l'arête de contact est encore un *axe instantané de rotation*, c'est-à-dire que *les directions et les rapports des vitesses sont les mêmes que si cet axe était fixe*, tandis que seulement sa vitesse est nulle. Le sommet du cône mobile est seul en repos.

53. Dans les deux cas précédents, les vitesses à un instant quelconque sont toutes parallèles à un même plan perpendi-

culaire à l'axe instantané de rotation, les vitesses des points situés dans un même plan passant par l'axe de rotation, sont perpendiculaires à ce plan.

4° Mouvement de rotation autour d'un point fixe.

54. Supposons que le système soit invariablement attaché à un point qui reste fixe pendant le mouvement du système. Dans ce cas on peut démontrer qu'à un instant quelconque le système a un axe instantané de rotation passant par le point fixe, comme dans l'hypothèse du n° 52.

Cette proposition étant sans application dans la mécanique industrielle, nous nous bornerons à l'énoncer.

5° Mouvement composé de translation et de rotation autour d'un axe ou autour d'un point.

55. Imaginons qu'une droite AB étant liée invariablement à un système solide en mouvement, tous les points de cette droite aient un mouvement commun de translation, curviligne ou rectiligne (44), et reste par conséquent parallèle à sa position initiale, tandis que les points du corps situés hors de cette même droite ont un mouvement différent; dans ce cas, on dit que le mouvement du *système solide est composé du mouvement de translation de la droite* AB *et d'un mouvement de rotation autour de cet axe.*

Cette expression se rattache aux notions établies au § 5 ci-dessus, n°s 34 et suiv. En effet, si l'on conçoit le système rapporté à trois axes coordonnés ayant le même mouvement de translation que la droite AB, cette droite sera en repos relatif, c'est-à-dire, en repos apparent pour un observateur entraîné à son insu dans le mouvement commun des axes, et le mouvement apparent ou relatif du premier système lié à la droite AB sera par conséquent un mouvement de rotation autour de cette droite.

56. Le mouvement de la terre offre un exemple remarquable de cette composition de deux mouvements simples. L'axe de notre globe reste sensiblement parallèle à une même direction pendant que le centre décrit en un an une ellipse dont le centre du soleil occupe un des foyers; c'est ce qui s'ap-

pelle le mouvement annuel de la terre; et le mouvement du globe par rapport à des axes coordonnés entraînés avec le centre, mais parallèlement à leurs premières directions, est un simple mouvement uniforme de rotation autour de la droite passant par les pôles.

La très-grande distance des étoiles à la terre permet de regarder comme parallèles les droites menées à deux instants quelconques des points de la terre à la même étoile. C'est pourquoi la durée d'une révolution de la terre dans son mouvement relatif de rotation, tel qu'il vient d'être défini, s'appelle un jour sidéral. Elle est invariablement de 86164 secondes, tandis que le jour solaire, dont la durée moyenne est de 86400 secondes, est variable selon la position de l'axe de la terre par rapport au soleil.

57. Quel que soit le mouvement d'un système solide, si l'on imagine que par l'un de ses points, A, on fasse passer trois axes coordonnés entraînés avec ce point A, mais restant parallèles à leurs directions initiales, le mouvement du système relativement à ces trois axes se réduit à un mouvement de rotation autour du point A, considéré comme fixe (54). Ainsi, *le mouvement le plus général d'un système solide peut être considéré comme composé du mouvement de translation déterminé par le mouvement absolu de l'un quelconque de ses points*, *et d'un mouvement relatif de rotation autour de ce point.*

CHAPITRE II.

DES FORCES CONSIDÉRÉES INDÉPENDAMMENT DE LA MESURE DE LEURS EFFETS.

§ 1. *Notions de la force, de son intensité, de sa projection sur un axe.*

58. Nous considérons les corps comme composés d'éléments plus ou moins rapprochés entre eux, invariables de forme et extrêmement petits, que nous appelons *points matériels.*

On admet comme fait d'expérience et comme PRINCIPE FONDAMENTAL en Mécanique, qu'*un point matériel ne peut ni se mettre en mouvement (s'il est actuellement en repos), ni changer actuellement, soit en grandeur, soit en direction, sa vitesse (s'il en a une), à moins qu'une cause externe n'agisse en même temps sur lui.*

Cette propriété s'appelle l'*inertie de la matière.*

La cause externe s'appelle *force.*

59. Quelques faits peuvent être cités, sinon comme preuves rigoureuses de l'inertie, du moins comme exemples de ses conséquences :

1° Des voyageurs en voiture ou en bateau, si le véhicule s'accélère ou se ralentit considérablement, prennent un mouvement relatif résultant de ce qu'ils persévèrent dans le mouvement précédemment acquis;

2° En transportant un liquide dans un vase à large ouverture, si l'on s'arrête ou si l'on précipite tout à coup sa marche, le liquide, par la même raison, s'épanche en avant ou en arrière;

3° Les ouvriers, pour emmancher leurs outils, font souvent un emploi utile de l'inertie;

4° Ils en tirent encore parti lorsqu'ils chargent une pierre de taille sur la voiture à bras et à deux roues appelée *diable.*

La voiture est d'abord renversée en arrière; son plancher touche le sol par sa partie postérieure, et la pierre se pose sur ce plan incliné. Il s'agit alors de la faire avancer vers le milieu, au-dessus de l'essieu. A cet effet, des hommes agissant à l'extrémité antérieure de la flèche font descendre celle-ci d'un mouvement rapide avec lequel elle vient choquer le sol. Le mouvement de rotation du plancher s'arrête brusquement; mais la pierre, en vertu de l'inertie, continue de s'élever, et fait un petit saut durant lequel les ouvriers placés derrière la poussent en avant. Pendant un temps très-court, le contact de la pierre et du plancher ayant cessé, le frottement n'existe plus; l'action combinée de la pesanteur et de l'effort des hommes fait avancer le bloc sur le plan qui se trouve alors incliné en avant. On répète plusieurs fois la même manœuvre, c'est-à-dire, qu'on relève la flèche et qu'on la rabaisse vivement en lui faisant frapper la terre pendant qu'on pousse la pierre jusqu'à ce qu'elle soit suffisamment avancée.

5° Une pierre lancée par une fronde s'échappe suivant la tangente à la courbe qu'elle décrivait, à l'instant où l'un des fils de la fronde est lâché. Jusque-là, l'action combinée des fils et de la pesanteur déterminait le mouvement circulaire.

60. Le mot *inertie* en Mécanique ne signifie pas inactivité, car toutes les parties de la matière agissent les unes sur les autres, suivant la loi générale reconnue par Newton. Il ne signifie pas non plus une résistance absolue à certaines forces, car la moindre force qui agirait seule sur un corps quelconque le mettrait en mouvement, ainsi que nous le montrerons plus loin.

61. D'après ce que nous venons de voir, *une force est la cause nécessaire et suffisante pour modifier la grandeur ou la direction de la vitesse d'un point matériel.*

L'idée de la force, dans le sens que la Mécanique attribue à ce mot, naît en nous de la sensation que nous éprouvons lorsque nous imprimons un mouvement à un corps, ou lorsque nous modifions le mouvement qu'il a déjà, ou, enfin, lorsque nous empêchons le mouvement qu'il prendrait si nous n'y résistions. D'autres causes que l'action de nos muscles produisant des effets semblables à ceux qui résultent de nos propres

efforts, nous sommes conduits à attacher à ces causes l'idée que l'expérience nous a donnée de la force.

Une force est donc toujours une chose analogue à la pression que nous exerçons sur les corps pour produire ou modifier leur mouvement.

Pendant que la vitesse d'un point matériel augmente ou diminue, ou bien change de direction, la force nécessaire pour produire cette modification existe ou agit (ces deux mots, exister ou agir, en parlant d'une force, signifient la même chose). Quand la force cesse, la modification de mouvement cesse au même instant, et en vertu de l'inertie le dernier état de la vitesse subsiste. Dès lors, et aussi longtemps que le corps reste abandonné à lui-même, il conserve sa vitesse; mais il ne faut pas dire qu'il conserve sa force: ce serait attribuer au mot force un sens différent de celui que nous venons de définir.

62. Les forces reçoivent, suivant certaines circonstances, diverses dénominations, telles que *traction*, *attraction*, *gravitation*, *poids*, *tension*, *pression*, *propulsion*, *répulsion*, *effort;* mais dans tous les cas la nature des forces est toujours la même, en ce sens que nous les concevons comme équivalentes à une action ou à une réunion d'actions pareilles à celles que nous exerçons sur les corps que nous touchons.

63. Toutes les forces de la nature sont composées d'éléments, seules forces qui existent réellement; les autres sont des conceptions de notre esprit qui entrent dans la science sous les noms de *sommes* ou *résultantes*, comme on le verra plus tard. Par exemple, la pesanteur s'exerce sur les moindres particules des corps, et le poids d'un corps n'est que la somme des poids de ses molécules; si votre main presse un corps, vous pouvez concevoir la surface de vos doigts, dans l'étendue du contact, divisée en éléments pour chacun desquels il y a une petite pression exercée, et la force totale que le corps reçoit de votre main se compose de ces pressions élémentaires.

Une force élémentaire actuellement existante s'exerce né-

cessairement sur un point d'un corps : ce point s'appelle le *point d'application* de la force.

64. Toute force tend à faire mouvoir suivant une certaine ligne droite son point d'application, s'il était isolé et d'abord en repos : la direction de cette ligne droite s'appelle la *direction de la force*.

65. Plusieurs forces peuvent être conçues simultanément appliquées à un même point, suivant la même droite et dans le même sens : la force unique à laquelle elles équivalent s'appelle leur *somme*.

66. On conçoit, d'après cela, le rapport de deux forces quelconques au moyen d'une commune mesure exacte ou approchée; de sorte que l'expression numérique d'une force dépend du choix d'une unité de force et du rapport de la force considérée à cette unité (*).

(*) Les notions qui viennent d'être exposées en ce qui concerne les forces et leurs rapports, n'ont pas toujours été admises sans contestation. D'Alembert avait dit (*Traité de Dynamique, discours préliminaire*, p. XXII *de l'édit. de* 1758) : « Nous n'avons d'idée précise et « distincte du mot *force* qu'en restreignant ce terme à exprimer un « effet. » Carnot adopta la même opinion, et voici en quels termes (*Principes de l'équilibre et du mouvement, préface*, p. XII, *édit. de* 1803) il combattait l'emploi du mot *force* pour exprimer une cause : « Quelle idée nette peut présenter à l'esprit en pareille matière le « nom de cause? Il y a tant d'espèces de causes! Et que peut-on « entendre dans le langage précis des mathématiques par une *force*, « c'est-à-dire, par une cause double ou triple d'une autre?... Qu'est-« ce que le rapport de deux causes différentes? Ces causes sont-elles « la volonté ou la constitution physique de l'homme ou de l'animal « qui, par son action, fait naître le mouvement? Mais qu'est-ce « qu'une volonté double ou triple d'une autre volonté, ou une cons-« titution physique capable d'un effet double ou triple d'une autre? « La notion du rapport des forces entre elles, considérées comme « causes, n'est donc pas plus claire que celle de ces forces elles-mêmes. »

Toute la difficulté ainsi soulevée nous semble se réduire à établir clairement ce que c'est qu'une force égale à une autre, une force double ou triple d'une autre; car quant à savoir ce qu'est une force,

67. On peut étudier la Mécanique rationnelle, sous un point de vue essentiellement théorique, sans fixer le choix d'une unité de force. Mais si ce choix n'est pas nécessaire, du moins il est utile dès le commencement pour se préparer aux applications industrielles.

L'unité que nous adopterons sera le kilogramme.

Définition. *Si un vase est suspendu par un fil très-fin et qu'on y verse un décimètre cube d'eau à la température de 4°,1, l'accroissement de la force qu'exerce le fil sur le point auquel il est attaché est d'un kilogramme, lorsque l'expérience est faite dans le vide à la latitude de Paris.*

Divers instruments, tels que les balances et les ressorts, peuvent servir à constater l'égalité de deux forces, et par suite à trouver le rapport de deux forces inégales.

68. On représente souvent une force par une portion de ligne droite dont l'une des extrémités est le point d'application de la force; la direction de la droite, à partir de ce point, est celle de la force; enfin, la longueur de la droite représente l'intensité de la force au moyen d'une échelle convenue.

---

c'est une notion simple, primitive, acquise par l'expérience, comme nous avons acquis celles de l'espace et du temps.

Or, 1° nous concevons nettement que deux forces exercées successivement par deux agents différents sur un corps placé chaque fois dans des circonstances d'ailleurs identiques, peuvent produire les mêmes effets, les mêmes modifications de mouvement : ces deux forces sont alors *égales*, bien que l'une résulte, par exemple, de la volonté et de la constitution physique d'un animal, l'autre de l'élasticité de la vapeur pressant un piston. Sans doute, c'est par leurs effets seulement que nous jugeons de l'égalité de ces deux forces; mais ce n'est pas une raison pour donner, comme le fait Carnot, le même nom à la cause et à l'effet.

2° Nous concevons aussi clairement que deux ou trois forces égales soient appliquées simultanément et dans la même direction à un mobile; et dès lors nous avons une idée nette d'une force double ou triple d'une autre.

Voir, pour certaines significations appliquées au mot *force*, les notes des n°s 72, 81, 157, 294.



69. Nous aurons souvent à considérer la *projection d'une force sur un axe :* il faudra entendre que *c'est la force représentée pour la grandeur et la direction, par la projection de la droite représentant la force dans l'espace.*

Ainsi, F étant une force représentée (*fig.* 8) par MN, la droite PQ représente une autre force qui est la projection de F sur l'axe Ox; et nous désignerons cette force par la notation F_x (prononcez F, indice x), en la supposant affectée du signe négatif dans le cas où elle agirait en sens contraire des x positifs.

Lorsque la projection est orthogonale, on a

$$F_x = F \cos(F, x),$$

quantité ayant le signe du cosinus, et par conséquent positive ou négative, selon que l'angle de la force avec Ox est aigu ou obtus.

§ 2. *De l'impulsion d'une force.*

70. Toute force agissant réellement sur un corps a nécessairement une certaine durée pendant laquelle la force peut d'ailleurs varier d'intensité.

Longtemps les savants ont admis qu'il existait dans la nature deux espèces distinctes de forces, les unes supposées sans durée, et capables de produire dans les corps des changements brusques de vitesse sans les faire passer par les états intermédiaires; les autres agissant sans interruption, d'une manière continue, et ne produisant par conséquent un effet sensible qu'après un temps appréciable. Ils appelaient les premières *forces instantanées* ou de percussion; les dernières, *forces accélératrices.*

Mais une saine physique constatant que toutes les actions sont continues dans la nature, on s'accorde généralement aujourd'hui à ne plus admettre dans la science les forces instantanées, et à ne reconnaître que des forces dont l'action a toujours une certaine durée, quelquefois très-petite, quelquefois indéfiniment prolongée, et dont l'intensité, qui peut

être très-grande, est néanmoins toujours comparable à une même unité, telle que le kilogramme défini au n° 67 (*).

71. Définition. *Lorsqu'une force* F *d'intensité constante agira pendant un certain temps* t, *nous appellerons* IMPULSION *due à cette force pendant le temps* t, *le produit* Ft *de son intensité par la durée de son action.*

Si la force est variable d'intensité, son IMPULSION *pendant un temps déterminé sera, entre les limites de ce temps, l'intégrale* $\int$Fdt *du produit de la force par la différentielle du temps.*

Cette quantité est indépendante de la vitesse du point d'application de la force.

72. Lorsqu'une force F est projetée sur un axe Ox (69), le produit $F_x t$, si la force F_x est constante, ou l'intégrale $\int_0^t F_x dt$, si elle est variable, est une quantité positive ou négative, que nous appellerons l'*impulsion de la force* F *projetée sur l'axe* Ox *pendant le temps* t.

L'utilité de cette espèce de quantité ne tardera pas à être aperçue (n°s 152 et suiv.) (**).

(*) Cette doctrine, qui repousse les forces instantanées, a été professée par M. Poncelet dans ses leçons à l'école de l'artillerie et du génie de Metz dès 1825, et par Coriolis dans son Traité du calcul de l'effet des machines, publié en 1829. Elle a été admise par Poisson dans la seconde édition de son Traité de mécanique, en 1835.

(**) Lorsque deux corps sont rapprochés au degré qui constitue le contact physique, leur action mutuelle peut être indéfiniment prolongée ou n'avoir qu'une très-courte durée. L'ancienne doctrine distinguait ces deux cas : dans le premier, on disait que ces deux corps agissaient l'un sur l'autre *par pression ;* dans le second, qu'ils agissaient *par impulsion.* La pression était précisément de la même nature que ce que nous appelons exclusivement une force. Mais ce qu'on appelait tantôt une *force d'impulsion,* tantôt simplement une impulsion, était en réalité le produit de l'action mutuelle (supposée constante) des deux corps, multipliée par la durée de cette action. (*Mécan. analyt. de Lagrange*, tome I, p. 256; tome II, p. 66.) La seule innovation que nous nous soyons permise est de supprimer le mot *force* devant celui d'*impulsion*, et de donner de cette expression une défi-

§ 3. *Des forces mouvantes ou résistantes et de leur travail.*

73. Une autre quantité qui entre dans les théorèmes les plus importants de la Mécanique, et surtout dans la théorie dynamique des machines, résulte de la combinaison des forces et des chemins que parcourent leurs points d'application.

Un point étant en mouvement en vertu de causes quelconques, considérons à part l'une des forces qui peuvent être appliquées simultanément à ce point, et l'accompagner dans son déplacement. Soient

F l'*intensité* de cette force, exprimée en kilogrammes, et considérée comme constante pendant un temps infiniment petit ;

ds le *chemin infiniment petit* décrit pendant ce temps par le point d'application de la force ;

cos (F, *ds*) *le cosinus de l'angle de* F *avec* ds, c'est-à-dire, de l'angle que forment la force et le chemin décrit, considéré comme se confondant avec sa tangente dans le sens du mouvement.

Définition. Cela posé, *on appelle travail élémentaire de la force* F *dans l'étendue du chemin* ds, *le produit infiniment petit*

$$F\,ds\cos(F, ds).$$

Ce produit de trois facteurs peut aussi être considéré de deux manières différentes, comme le produit d'une force par une longueur infiniment petite :

1° Mis sous la forme $F.\big(ds\cos(F, ds)\big)$, le travail élémentaire de la force F est le produit de cette force par la projection orthogonale $ds\cos(F, ds)$ du chemin *ds* sur la direction de la force.

2° Sous la forme $ds.\big(F\cos(F, ds)\big)$, le travail élémentaire de la force F est le produit du chemin *ds* par la projec-

---

nition qui comprend toutes les forces possibles considérées sous le rapport de leur durée quelconque, et qui s'accorde avec la nouvelle théorie dans laquelle on n'admet point les forces instantanées.

tion orthogonale de la force sur la tangente prolongement de *ds* dans le sens du mouvement.

Nous résumons cette définition par la formule

$$d\,.\,\mathcal{T}\mathrm{F} = \mathrm{F}\,ds\cos(\mathrm{F},\,ds), \qquad [9]$$

dans laquelle la notation $\mathcal{T}\mathrm{F}$ signifie *travail de la force* F (*).

74. Définition. En conséquence, *le travail d'une force* F *entre deux positions déterminées quelconques de son point d'application est* l'intégrale de l'expression précédente ou *la somme des travaux élémentaires de cette force entre les deux limites considérées;* c'est ce qu'on exprimera par la formule

$$\mathcal{T}\mathrm{F} = \int \mathrm{F}\,ds\cos(\mathrm{F},\,ds). \qquad [10]$$

75. Dans les définitions et formules précédentes, la force F et le chemin *ds* sont des quantités essentiellement positives, tandis que le facteur numérique cos(F, *ds*) est positif ou négatif, selon que l'angle de F avec *ds* est plus petit ou plus grand qu'un angle droit.

Le travail positif s'appelle souvent travail *moteur*, et le travail négatif s'appelle travail *résistant.*

Les forces dont le travail est moteur, c'est-à-dire dont les directions font des angles aigus avec la direction du mouvement de leurs points d'application, s'appellent *forces mouvantes;* celles qui font des angles obtus avec cette direction s'appellent *forces résistantes.*

76. Dans le cas particulier où la force et le chemin élémentaire sont suivant la même droite, le cosinus devient $+1$, ou -1, et le travail élémentaire est le produit de la force par le chemin, produit positif ou négatif selon que la force et le chemin sont de même sens ou de sens contraires.

77. Lorsqu'une force, en accompagnant son point d'application dans son mouvement, reste normale à la ligne décrite, le cosinus est zéro, et le travail de cette force est *nul.*

(*) La dénomination très-expressive de *travail d'une force* a été substituée par MM. Coriolis et Poncelet à l'expression vague de *quantité d'action*, et à d'autres aussi peu satisfaisantes.



78. Une autre conséquence facile à déduire des définitions précédentes, c'est que si, parmi les causes qui obligent un point à parcourir une courbe quelconque, il se trouve une force constante en intensité et en direction, de sorte qu'elle accompagne son point d'application en se transportant parallèlement à elle-même, *le travail de cette force dans une étendue quelconque du déplacement du mobile, est égal au produit de la force par la projection, sur une parallèle à cette force, de la corde qui joint la position initiale du point d'application à sa position finale;* produit positif ou négatif suivant que le dernier point du chemin décrit se projette sur la partie positive ou sur la partie négative de l'axe mené par la position initiale parallèlement à la force et dans le même sens.

79. Enfin, si une force d'intensité constante fait continuellement le même angle avec le chemin élémentaire ds parcouru, le travail est égal au produit du chemin total multiplié par la projection rectangulaire de la force sur la tangente au chemin ; projection positive ou négative suivant que le sens de la force et celui du chemin forment un angle aigu ou obtus.

80. Dans la pratique, l'unité de travail répond naturellement à une force d'un kilogramme agissant dans l'étendue d'un mètre, la force et le chemin ayant la même direction : cette unité s'appelle *kilogrammètre*, dénomination proposée par M. Poncelet, et s'indique par la notation $1^{kg.m}$.

Coriolis a appelé *dynamode* la quantité de travail exprimée par *mille kilogrammètres*.

81. Le travail d'une force pour un parcours déterminé de son point d'application est, d'après sa définition, indépendant du temps, c'est-à-dire de la durée de ce parcours. Mais dans la mécanique pratique, on a quelquefois besoin de désigner un travail indéfiniment prolongé et qui conserve des valeurs égales pendant des temps égaux. On pourrait prendre, pour unité de travail indéfiniment prolongé, un kilogrammètre par seconde; mais dans l'industrie on fait souvent usage d'une autre unité : on s'accorde assez généralement, en France, pour admettre comme terme de comparaison un travail continu de

$75^{kg.m}$ par seconde, que nous appellerons, comme plusieurs auteurs, *cheval-vapeur*, ou *cheval dynamique*.

Nous pensons que c'est improprement que cette quantité est quelquefois nommée *force de cheval*, traduction incorrecte de l'expression anglaise *horse power*, *puissance de cheval*. Dans ce cas, le mot puissance a le sens de capacité de travail, et rien ne s'oppose à ce qu'on lui assigne cette signification en Mécanique. Mais il est dangereux, dans le commencement de l'étude de cette science, de confondre l'idée simple de *force* avec l'idée complexe de *travail*. Une force s'exprime en kilogrammes; un travail ou une puissance mécanique s'exprime en kilogrammètres.

Nous pourrons donc dire, par exemple, une puissance de huit chevaux, un travail de dix chevaux; nous éviterons de parler d'une force de huit ou dix chevaux (*).

82. Le travail d'une force, comme toute intégrale définie, peut être représenté par l'aire d'une courbe, qui lui sera numériquement égale. Il suffit de prendre pour abscisses les chemins à compter d'un point déterminé, et pour ordonnées les valeurs correspondantes de la force projetée sur la direction

---

(*) En supposant que, comme le dit Carnot (*Principes de l'équil. et du mouv.*, p. 34), *il se présente deux manières aussi naturelles l'une que l'autre d'évaluer l'action qu'exercent les moteurs animés, l'une qui consiste à voir quel fardeau un homme, par exemple, peut porter, ou quel effort évalué en poids il peut soutenir, tout demeurant en repos; l'autre qui est d'examiner l'ouvrage qu'il est en état de faire dans un temps donné*... nous pensons qu'il est nécessaire de ne pas confondre dans une même dénomination ces deux manières d'envisager les forces, savoir, leur intensité et leur travail.

D'Aubuisson (*Traité d'hydraulique*, p. 334) prétend que « dans les arts... on a toujours dit et l'on dira toujours : la *force* d'un courant d'eau, d'une machine, d'un cheval. » Néanmoins, il joint au mot *force* l'adjectif *dynamique* pour exprimer l'idée de travail, et il appelle la force proprement dite, *force statique*, comme si les forces qui agissent dans l'état d'équilibre étaient d'une autre nature que celles qui s'exercent pendant le mouvement. Nous ne pouvons admettre ce sacrifice de l'exactitude à l'usage.



du chemin. L'évaluation numérique de l'aire ou du travail qu'elle représente s'obtient par les méthodes exactes ou approximatives du calcul intégral. La question suivante donne lieu à l'application de ces méthodes.

Exemple. *Travail exercé par un gaz qui se détend.* On suppose qu'un piston, qui se meut dans un cylindre, est pressé par un gaz sur une de ses faces dont l'aire est A. Le volume occupé par le gaz à l'instant initial est V_0, et équivaut au volume cylindrique AL_0 dont la base est A et la longueur L_0. A ce même instant la pression totale que le gaz exerce sur le piston est désignée par F_0. Pendant le mouvement, le volume du gaz, dont le poids ne varie pas, augmente de l'espace cylindrique décrit par le piston. On admet que la pression du gaz varie en raison inverse de son volume, suivant une loi sur laquelle nous reviendrons quand nous traiterons des gaz. On demande le travail résultant de cette pression depuis l'instant initial jusqu'à celui où le volume du gaz est devenu $V = AL$.

A un instant intermédiaire quelconque, si l'on désigne son volume par Ax, la longueur x étant l'espace linéaire entre le piston et une origine prise à une distance L_0 en arrière de sa position initiale, le rapport du volume actuel du gaz au volume initial est $\frac{x}{L_0}$; la pression supportée par la face considérée du piston est $\frac{F_0 L_0}{x}$ d'après la loi admise ; et pendant que le piston s'avance d'une quantité infiniment petite, qui est un accroissement de x représenté par dx, le travail de toutes les forces exercées par le gaz dans la direction du mouvement sur les éléments de la surface du piston est $\frac{F_0 L_0}{x}\, dx$. En intégrant (*Géom. anal.*, 288), on trouve le travail total, savoir :

$$T = F_0 L_0 \int_{L_0}^{L} \frac{dx}{x} = 2,3026\, F_0 L_0 \log.\frac{L}{L_0} = 2,3026\, \frac{F_0}{A} V_0 \log.\frac{V}{V_0}.$$

A défaut de tables de logarithmes, on calculerait l'intégrale $\int_{L_0}^{L} \frac{dx}{x}$ par la formule de Th. Simpson (*Géom. anal.*, 302).

Soit, par exemple, $L = 4L_0$. Si l'on divise l'intervalle $L - L_0$ ou $3L_0$ en 4 parties égales, ses abscisses extrêmes et celles des 3 points intermédiaires seront

valeurs de x...	$x_0 = L_0$	$x_1 = \frac{7}{4} L_0$	$x_2 = \frac{10}{4} L_0$	$x_3 = \frac{13}{4} L_0$	$x_4 = 4L_0$
valeurs correspondantes de $\frac{1}{x}$	$y_0 = \frac{1}{L_0}$	$y_1 = \frac{4}{7L_0}$	$y_2 = \frac{4}{10L_0}$	$y_3 = \frac{4}{13L_0}$	$y_4 = \frac{1}{4L_0}$,

d'où
$$\int_{L_0}^{L} \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} \frac{L - L_0}{4} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + 4\left(\frac{4}{7} + \frac{4}{13}\right) + 2\,\frac{4}{10}\right).$$

Le résultat est 1,39, tandis que l'intégrale exacte 2,3026 log 4 est, à moins d'un demi-millième près, 1,386.

CHAPITRE III.

DES MASSES ET DE LEURS COMBINAISONS AVEC DES DISTANCES ET AVEC DES VITESSES.

§ I. *De la masse d'un corps.*

83. Lorsque deux points matériels sont tels que, sollicités respectivement par deux forces égales en intensité et en direction, ils prendraient le même mouvement, on dit qu'ils ont la même *masse*. Si pour prendre un même mouvement ils exigent des forces différentes, on dit que *leurs masses* sont proportionnelles à ces forces. On verra plus tard que pour prendre des mouvements identiques quelconques, deux points matériels exigent des forces qui conservent le même rapport tant qu'il s'agit des deux mêmes points. En conséquence, on peut réduire aux termes suivants la notion fondamentale de la masse telle qu'on la considère en Mécanique :

Les masses de divers points matériels sont des grandeurs proportionnelles aux forces nécessaires pour imprimer à ces corps un même mouvement.

84. La masse d'un corps quelconque est la somme des masses des points matériels dont ce corps est composé.

85. On doit, d'après ce qui précède, comprendre que les mots *inertie* et *masse* n'expriment pas la même chose. L'inertie fait qu'une force est nécessaire pour produire ou modifier le mouvement d'un corps quelconque ; la masse plus ou moins grande d'un corps fait qu'une force plus ou moins grande est nécessaire pour imprimer à un corps un certain mouvement ou une certaine modification de mouvement. L'inertie est une propriété commune à tous les corps ; la masse de chaque corps est une certaine grandeur propre à ce corps.

86. Pour faire entrer les masses des corps comme quantités dans les calculs, il faut faire choix d'une unité de masse.

On est convenu de prendre pour unité de masse celle d'un corps qui, supposé concentré en un seul point, exigerait l'action d'une force constante égale à l'unité de force, pendant l'unité de temps, pour acquérir l'unité de vitesse.

87. Il résulte de cette convention que l'expression numérique de la masse d'un corps est la même que l'expression numérique de la force qui, dans l'unité de temps, ferait acquérir à ce corps l'unité de vitesse. En d'autres termes, la masse d'un corps contient autant d'unités de masse qu'il y a d'unités de force dans la force capable d'imprimer à ce corps l'unité de vitesse, après avoir agi pendant l'unité de temps.

88. L'expérience constate que le poids d'un corps dans un lieu déterminé est une force constante. Quand le lieu d'observation est à la latitude de Paris, ce poids agissant seul et par conséquent dans le vide sur le corps quel qu'il soit, lui fait acquérir au bout d'une seconde une vitesse de $9^m,8088$. De là on conclut, comme nous le verrons bientôt, que pour imprimer en une seconde à un corps une vitesse d'*un mètre* seulement, il ne faudrait qu'une force égale à son poids divisé par 9,8088.

En rapprochant ce fait expérimental de la proposition établie au n° précédent, on voit que

La masse d'un corps est exprimée numériquement par le poids de ce corps pesé dans le vide à Paris, divisé par le nombre abstrait 9,8088.

Ce dernier nombre sera toujours dans nos formules désigné par la lettre g.

Donc, si le poids d'un corps pesé dans le vide à la latitude de Paris est p, et si sa masse est m, on a

$$m = \frac{p}{g}. \qquad [11]$$

§ 2. *De la quantité de mouvement et de la puissance vive d'un point matériel ou d'un système matériel en mouvement.*

89. Définition. *Le produit de la masse d'un point matériel par la vitesse qu'il possède à un certain instant s'appelle la*

QUANTITÉ DE MOUVEMENT *de ce corps élémentaire à l'instant considéré.*

Si l'on désigne par m la masse et par v la vitesse, la quantité de mouvement est donc mv.

.90 DÉFINITION. *Le produit de la masse d'un point matériel par la projection de sa vitesse sur un axe, s'appelle la projection de la quantité de mouvement de ce point sur cet axe à l'instant considéré.* L'axe étant supposé Ox, la notation de cette quantité est mv_x. Elle est positive ou négative suivant le signe de v_x. (28).

91. DÉFINITION. *Étant considéré un système quelconque de points matériels en mouvement, la somme algébrique des projections des quantités de mouvement de ces divers points sur un axe quelconque, s'appelle la quantité de mouvement du système projetée sur cet axe.* L'axe étant supposé Ox, la notation de cette quantité, qui peut être positive ou négative, est

$$\sum mv_x.$$

92. DÉFINITIONS. 1° *La moitié du produit de la masse d'un point matériel par le quarré de sa vitesse s'appelle la puissance vive de ce corps à l'instant considéré.* Sa notation est

$$\frac{1}{2} mv^2.$$

2° *La puissance vive d'un système matériel est la somme des puissances vives de ses éléments.* Sa notation est

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \sum mv^2.$$

Les puissances vives sont donc des quantités essentiellement positives.

On verra plus loin (160 et 168) comment on est conduit à considérer la quantité de mouvement et la puissance vive dans les corps en mouvement.

§ 3. *Du centre de gravité d'un système de points matériels.*

93. Un point matériel occupant une position quelconque dans l'espace, le produit mx de sa masse m par sa distance x à un plan yOz s'appelle le *moment* de cette masse par rapport au

plan considéré. Si celui-ci passe par le point, le moment est nul. Les moments de deux points matériels par rapport à un plan qui passe entre eux deux, sont de signes contraires.

94. Théorème. *Quel que soit un système de points matériels en mouvement ou en repos, indépendants ou liés par des actions mutuelles, il y a à chaque instant un point géométrique tellement situé, que le produit de la masse entière du système par la distance de ce point à un plan quelconque est égal à la somme algébrique des moments des masses élémentaires pris au même instant par rapport au même plan.*

Ce point géométrique s'appelle *le centre de gravité* du système matériel (*). Le produit de sa distance à un plan par la

(*) L'existence du centre de gravité a été découverte par la considération de l'équilibre des corps solides, et la définition qu'on en donne ordinairement suppose la solidité du système. Le centre de gravité d'un corps est, dit-on, le *point du corps* par lequel passe continuellement la *résultante* des actions de la pesanteur sur ses éléments, de quelque manière que le corps soit tourné dans l'espace. Cette définition a plusieurs inconvénients : 1° elle peut induire en erreur en faisant croire que le centre de gravité est un point matériel faisant partie du corps considéré, ce qui n'est pas (exemple, une sphère creuse, un anneau); 2° et même dans le cas où l'on modifierait la définition pour éviter cette erreur, elle ne s'applique pas immédiatement et sans explication à un corps variable de forme, à un liquide, à un système de plusieurs corps; il y a alors quelque difficulté à faire bien comprendre ce qu'on entend par la résultante des actions de la pesanteur.

La définition que nous adoptons, à l'exemple des géomètres du dix-huitième siècle, est plus générale et n'est sujette à aucune fausse interprétation.

Le théorème (94) qui sert de fondement à cette définition est proprement une proposition de géométrie qu'on pourrait énoncer en ces termes : *Quel que soit un système de points géométriques occupant à un instant quelconque des positions déterminées, si l'on affecte à chacun de ces points un nombre quelconque, il existe à chaque instant un point géométrique tellement situé que le produit de sa distance à un plan quelconque par la somme des nombres assignés à tous les points est égal à la somme des produits partiels de la distance* (positive ou né-

masse entière du système s'appelle le *moment de la masse du système par rapport à ce plan.*

Démonstration. 1° Soient deux points matériels dont les masses sont m', m'', occupant les positions A', A'' (*fig.* 9).

Leur centre de gravité ne peut être que sur la droite A'A'', car, autrement, par rapport à un plan passant par ce point et laissant A' et A'' d'un même côté, le moment de la masse totale serait nul sans que la somme des moments élémentaires le fût.

Soit G'' le centre de gravité dont la position est inconnue, et dont l'existence même est à démontrer. Si l'on abaisse sur un plan quelconque les perpendiculaires A'B', A''B'', G''C désignées par x', x'', X'', il faudra que l'on ait

$$(m'+m'')X''=m'x'+m''x'',$$

ou

$$m'(X''-x')=m''(x''-X'').$$

Si l'on mène N'N'' parallèle à B'B'', on a

$$X''-x'=A'N' \quad \text{et} \quad x''-X''=A''N''.$$

Ainsi pour que le point G'' jouisse de la propriété énoncée, il faut et il suffit que l'on ait . . . . . $m':m''::A''N'':A'N'$,
ce qui revient à. . . . . $m':m''::A''G'':A'G''$;
c'est-à-dire que le centre de gravité de deux points matériels est sur la droite A'A'' qui joint ces deux points et la partage

---

gative) *de chaque point au même plan multipliée par le nombre propre à ce point.* (Si par exemple les points divers dont il s'agit sont les centres des communes d'un département, et qu'on leur assigne des nombres représentant les populations de ces communes, le point dont l'existence est indiquée par le théorème est le centre de la population du département.) La démonstration de ce théorème ne différerait de celle que nous donnons qu'en ce que les masses partielles seraient remplacées par les nombres représentant l'importance des points du système sous un point de vue quelconque. Si les lecteurs trouvaient quelque obscurité dans les notions précédemment établies sur les masses des corps, que la deuxième section éclaircira, ils pourraient considérer provisoirement les masses comme représentées par des nombres affectés aux éléments d'un système matériel.

en deux parties A′G″, A″G″ réciproquement proportionnelles aux deux masses m', m''.

Le point G″ étant ainsi déterminé, l'équation

$$(m' + m'')\,X'' = m'x' + m''x''$$

a lieu, quelle que soit la situation du plan de comparaison, pourvu qu'on ait égard aux signes des ordonnées x', x'', X''. C'est ce que nous laissons au lecteur le soin de vérifier.

2° Soient deux systèmes matériels quelconques dont les masses totales sont M′, M″. Supposons qu'il existe pour chacun d'eux un centre de gravité, c'est-à-dire un point satisfaisant à la propriété énoncée par le théorème, et soient A′, A″ ces deux centres de gravité. Le raisonnement précédent s'appliquera exactement pour démontrer l'existence du centre de gravité G″ de l'ensemble des deux systèmes, et pour faire voir qu'il partage la droite A′A″ en deux parties A′G″, A″G″, réciproquement proportionnelles aux deux masses M′, M″. Car dans l'équation $(M' + M'')\,X'' = M'x' + M''x''$ à laquelle ce point satisfera, quel que soit le plan B′B″, les produits $M'x'$, $M''x''$ réuniront, d'après l'hypothèse, les moments de tous les éléments des deux systèmes.

3° Soient trois masses élémentaires m', m'', m''' occupant les positions A′, A″, A‴. On peut partager leur ensemble en deux parties dont l'une soit formée du système des deux éléments m', m'''; l'autre sera l'élément m'''. Donc, d'après la remarque que nous venons de faire, le système total a un centre de gravité G‴ qui est sur la droite G″A‴ joignant le centre de gravité G″ des deux premiers éléments à la position A‴ du troisième, et il partage cette droite en deux parties réciproquement proportionnelles aux masses $m' + m''$ et m'''.

Cette démonstration, qui s'étend facilement à un nombre quelconque de points, prouve l'existence du centre de gravité tel qu'il a été défini, et indique le procédé géométrique pour le trouver.

95. Si x', y', z', x'', y'', z''..... sont les coordonnées rectangulaires des points d'un système dont les masses sont m', m''..., et si X, Y, Z sont les coordonnées du centre de gravité, en

désignant par $\sum mx$ la somme $m'x' + m''x'' + \ldots\ldots$, par $\sum my$, et $\sum mz$ les sommes analogues; enfin par $\sum m$ la somme des masses, on a, en vertu du n° précédent,

$$X\sum m = \sum mx,\quad Y\sum m = \sum my,\quad Z\sum m = \sum mz,$$

$$\text{d'où}\quad X = \frac{\sum mx}{\sum m},\quad Y = \frac{\sum my}{\sum m},\quad Z = \frac{\sum mz}{\sum m}. \qquad [12]$$

Non-seulement ces équations [12] fournissent les coordonnées du centre de gravité en fonctions des masses des éléments et de leurs coordonnées, mais elles prouvent en outre que ce centre est un point unique.

96. Les dernières équations subsisteraient également pour des coordonnées obliques, car dans ce cas les coordonnées $x', x''\ldots\ldots X$, par exemple, sont proportionnelles aux distances des points du système et du centre de gravité au plan des yz.

97. On voit aisément que ces mêmes équations s'appliquent au centre de gravité d'un système composé de groupes ou systèmes partiels dont les masses *totales* seraient $m', m'', \ldots\ldots$, et dont les centres de gravité auraient les coordonnées $x', y', z', x'', y'', z''\ldots\ldots$

En général, la position du centre de gravité du système composé ne dépend que de celle des centres de gravité des systèmes partiels, et des rapports de leurs masses totales entre elles. Elle peut se conclure de ces données soit analytiquement, soit par le procédé géométrique indiqué au n° 94.

98. On peut, dans toutes les équations précédentes, substituer aux masses les poids qui leur sont proportionnels (88). Ainsi $p', p'', p'''\ldots\ldots$ étant les poids des éléments d'un système quelconque; $x', x'', x'''\ldots\ldots$ étant les ordonnées rectangulaires ou obliques de ces points par rapport à un plan des yz; P étant le poids total du système, X l'ordonnée du centre de gravité par rapport au plan, on a, en multipliant par g les deux membres de la première équation du n° 95,

$$XP = p'x' + p''x'' + \ldots\ldots \quad \text{ou} \quad XP = \sum px; \qquad [13]$$

ce qu'on exprime en disant que *par rapport à un plan quel-*

conque, le moment du poids total du système fictivement réuni au centre de gravité est égal à la somme des moments des poids des éléments du système par rapport au même plan.

99. Si l'on transporte ou si l'on projette toutes les masses d'un système par des parallèles à un axe (celui des z par exemple) sur le plan des deux autres axes (celui des xy), les coordonnées x, y des masses élémentaires ne changeant pas, les coordonnées X, Y du centre de gravité resteront aussi les mêmes; donc *le centre de gravité de la projection est la projection du centre de gravité du système.*

Il en sera de même si la projection de tous les éléments du système se fait sur un axe par des plans parallèles.

100. Si les masses des systèmes partiels sont égales, la distance du centre de gravité de l'ensemble à un plan quelconque est la moyenne arithmétique des distances des centres de gravité partiels au même plan. Le centre de gravité du système s'appelle quelquefois dans ce cas, *centre des moyennes distances* des centres partiels.

101. Dans l'application du calcul et de la géométrie à la physique et à la mécanique, on admet l'existence de corps mathématiquement homogènes, dans toute l'étendue desquels la masse M comprise sous une portion quelconque du volume apparent, divisée par l'expression numérique V de ce volume, donne un quotient parfaitement constant qui est la masse sous l'unité de volume, et qui s'appelle en mécanique la *densité* du corps; et si P désigne le poids d'une partie quelconque du corps, le quotient $\frac{P}{V}$, quantité constante dans toute l'étendue du corps, est le poids sous l'unité de volume, et s'appelle le *poids spécifique* de ce même corps.

Cette notion, qui strictement suppose la continuité de la matière, ne convient pas en toute rigueur aux corps naturels, assemblages d'atomes ou parties matérielles non contiguës, séparées les unes des autres par des pores ou espaces vides de matière pondérable.

Mais comme les atomes et leurs intervalles sont d'une extrême petitesse, tellement que sous un volume encore imper-

ceptible pour nous, il peut en entrer un nombre immense, l'hypothèse de la continuité ne peut entraîner aucune erreur appréciable, lorsqu'il s'agit, soit des relations existantes entre le volume, la masse et le poids des corps mécaniquement homogènes, soit de la détermination de leurs centres de gravité; et cette hypothèse a l'avantage de permettre l'emploi des méthodes mathématiques, dans tous les cas où les figures des corps satisfont, avec une approximation suffisante, aux définitions de la géométrie.

Le centre de gravité d'un corps considéré comme mathématiquement homogène peut être défini *à priori*, en substituant, dans la définition donnée ci-dessus (94), aux masses des éléments de ce corps, leurs volumes qui leur sont alors proportionnels. C'est pourquoi ce point s'appelle souvent *centre de gravité du volume* de ce corps, et il est évident que l'étendue et la figure de l'espace occupé par le corps sont les seules données nécessaires pour déterminer le centre de gravité indépendamment de la densité. (*Géom. anal.*, n° 306 *et suiv.*)

102. Si les points dont les masses sont m', m'', m'''......, ont un mouvement, soient x', x'', x'''......, leurs abscisses sur un axe des x à un instant quelconque, et X l'abscisse du centre de gravité de leur système à ce même instant, on a

$$(m' + m'' + m''' + \ldots\ldots)\,X = m'x' + m''x'' + m'''x''' + \ldots\ldots$$

Pendant un temps infiniment petit dt, les diverses abscisses prendront des accroissements dx', dx'', dx'''....., dX, et l'on aura

$$(m' + m'' + m''' + \ldots)\frac{dX}{dt} = m'\frac{dx'}{dt} + m''\frac{dx''}{dt} + m'''\frac{dx'''}{dt} + \ldots$$

c'est-à-dire (90) que *la quantité de mouvement projetée sur un axe, de toute la masse d'un système concentrée fictivement au centre de gravité, est égale à la somme des quantités de mouvement de toutes les masses élémentaires projetées sur le même axe.* Ce qui peut s'écrire ainsi, en abrégé, U étant la vitesse du centre de gravité :

$$U_x \sum m = \sum m v_x. \qquad [14]$$

103. Trois équations semblables à cette dernière donnent

la vitesse U du centre de gravité, et sa direction en fonctions des vitesses des masses élémentaires du système, et des angles que forment leurs directions avec trois axes rectangulaires.

§ 4. *De la puissance vive d'un corps solide tournant autour d'un axe fixe, et de son moment d'inertie par rapport à cet axe.*

104. Il n'existe point dans la nature de corps mathématiquement solide, c'est-à-dire, dont tous les éléments conservent entre eux des distances parfaitement invariables. Cependant lorsque les forces qui tendent à les déformer ne sont pas trop grandes, l'expérience prouve que l'on peut considérer certains corps comme ayant approximativement la propriété de la solidité mathématique.

Un tel corps étant en mouvement de rotation autour d'un axe fixe, appelons

ω la vitesse angulaire de ce corps à un certain instant,

m la masse d'un quelconque de ses éléments,

r la distance de cet élément matériel à l'axe de rotation;

sa vitesse sera par conséquent (48). . . . . ωr

et sa puissance vive (92). . . . . $\frac{1}{2} m \omega^2 r^2$

La puissance vive totale du corps est donc. . $\sum \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$;

et comme la quantité $\frac{1}{2}\omega^2$ entre comme facteur commun à tous les termes de cette somme qui se rapporte à un instant déterminé, cette somme se réduit à

$$\frac{1}{2}\omega^2 \sum mr^2. \qquad [15]$$

105. La quantité $\sum mr^2$, somme des produits obtenus en multipliant chaque masse élémentaire d'un système solide par le quarré de sa distance à un axe, s'appelle le *moment d'inertie* du système par rapport à cet axe. On voit qu'il est égal à la masse qu'il faudrait placer à l'unité de distance de l'axe, pour que, tournant avec la même vitesse angulaire, elle possédât seule la même puissance vive que le corps solide considéré. D'après

cette définition, la formule précédente peut s'énoncer ainsi : *La puissance vive d'un corps solide tournant autour d'un axe fixe est, à un instant quelconque, égale à la moitié du quarré de la vitesse angulaire du corps à cet instant multipliée par son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.*

106. La détermination du moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque est facilitée par un théorème général, au moyen duquel, quand on connaît le moment d'inertie d'un système solide par rapport à un axe passant par le centre de gravité, on trouve celui du même système par rapport à tout autre axe parallèle au premier.

Soit Oz (*fig.* 10) ce premier axe, et AB l'autre axe. Menons Ox perpendiculaire à ces deux droites; Oy perpendiculaire au plan zOx. Soit M un point quelconque du système; appelons x et y ses coordonnées parallèles aux axes Ox et Oy. Ainsi $OP=x$, $PC=y$. Sa distance MQ ou r_1 à l'axe Oz sera égale à OC ou $\sqrt{x^2+y^2}$, et sa distance r à l'axe AB étant égale à AC, on aura, en faisant $OA=k$,

$$r^2=y^2+(k-x)^2=y^2+x^2+k^2-2kx=r_1^2+k^2-2kx,$$

et en multipliant par m, $$mr^2=mr_1^2+mk^2-2kmx,$$
équation applicable à tout point du système en donnant à x le signe convenable, c'est-à-dire, en le faisant négatif quand le point est derrière le plan yOz.

Supposant donc qu'on ait écrit autant d'équations semblables à la dernière qu'il y a de points, et les ajoutant, puis remarquant que, puisque le centre de gravité G est sur l'axe Oz, la somme algébrique des moments $\sum mx$ par rapport au plan yOz est nulle (106), on a

$$\sum mr^2=mr_1^2+\sum k^2m; \qquad [16]$$

donc *le moment d'inertie d'un système solide, par rapport à un axe quelconque, s'obtient en ajoutant au moment d'inertie par rapport à un axe mené parallèlement à celui-ci par le centre de gravité, le produit de la masse entière par le quarré de la distance des deux axes.*

107. A l'exemple de quelques auteurs anglais, nous ap-

pelons *rayon de gyration* la longueur R qui satisfait à l'équation

$$\sum mr^2 = R^2 . \sum m;$$

c'est la distance, à partir de l'axe, à laquelle il faudrait transporter la masse totale du corps tournant, pour que le moment d'inertie ne fût pas changé non plus que la puissance vive, la vitesse angulaire restant la même.

Si l'on désigne par R_1 le rayon de gyration du corps par rapport à l'axe Oz passant par le centre de gravité, la dernière équation du n° 106 donne, en supprimant le facteur commun $\sum m$,

$$R^2 = R_1^2 + k^2, \qquad [17]$$

c'est-à-dire que *le quarré du rayon de gyration d'un corps par rapport à un axe quelconque est égal à la somme du quarré du rayon de gyration par rapport à un axe parallèle, mené par le centre de gravité, et du quarré de la distance des deux axes.*

108. Lorsqu'il s'agit d'un corps homogène, on peut, dans l'équation $\sum mr^2 = R^2 \sum m$, substituer aux masses élémentaires les volumes u correspondants qui leur sont proportionnels. On a ainsi

$$\sum ur^2 = R^2 \sum u,$$

et le rayon de gyration peut alors être défini indépendamment de toute notion de mécanique.

La détermination des moments d'inertie ou des rayons de gyration des corps homogènes de figure géométrique est une des applications utiles du calcul intégral. (*Géom. anal.*, p. 343 et suiv.)

109. Nous avons vu (104) que la puissance vive d'un corps solide tournant autour d'un axe fixe s'exprime par

$$\frac{1}{2} \omega^2 \sum mr^2.$$

L'axe fixe étant supposé AB, mettons pour $\sum mr^2$ l'expression équivalente obtenue au n° 106, la puissance vive sera représentée par

$$\frac{1}{2} \omega^2 \sum mr_1^2 + \frac{1}{2} \omega^2 k^2 \sum m \cdot$$

Or, ωk est la vitesse absolue du centre de gravité G, pendant que le système solide tourne autour de AB. Désignons cette vitesse par v_1, et la puissance vive du système sera exprimée par

$$\frac{1}{2} v_1^2 \sum m + \frac{1}{2} \omega^2 \sum m r_1^2,$$

ce qui peut s'énoncer en ces termes :

La puissance vive d'un corps solide tournant autour d'un axe fixe peut se décomposer en deux parties, dont l'une est la puissance vive qu'aurait le corps si toute sa masse était condensée au centre de gravité, et l'autre est la puissance vive que posséderait le système s'il tournait avec la même vitesse angulaire autour d'un axe parallèle au premier et passant par le centre de gravité.

110. Ce résultat n'est qu'un cas particulier d'une proposition dont nous allons reproduire la démonstration donnée par Coriolis dans son traité du *Calcul de l'effet des machines* (p. 77 et suiv.). Considérons une réunion quelconque de points matériels liés ou indépendants entre eux, et cherchons à exprimer sa puissance vive totale en fonction de la vitesse du centre de gravité, et des vitesses relatives à des axes mobiles, qui, menés par le centre de gravité, seraient entraînés avec lui en un mouvement de translation. Soient

X, Y, Z les coordonnées mobiles du centre de gravité par rapport à des axes fixes,

x, y, z les coordonnées d'un quelconque des points du système par rapport aux mêmes axes,

x', y', z' les coordonnées du même point par rapport à des axes parallèles aux premiers, mais passant par le centre de gravité mobile.

On a à chaque instant

$$x = X + x'$$
$$y = Y + y'$$
$$z = Z + z',$$

d'où, en différentiant par rapport au temps,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dX}{dt}+\frac{dx'}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dY}{dt}+\frac{dy'}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt}=\frac{dZ}{dt}+\frac{dz'}{dt}.$$

En représentant par V la vitesse du centre de gravité, par v la vitesse absolue d'un point du système, par v' sa vitesse relative aux axes mobiles, toutes ces vitesses étant prises à un même instant, ces trois équations peuvent s'écrire ainsi :

$$v_x=V_x+v'_{x'}$$
$$v_y=V_y+v'_{y'}$$
$$v_z=V_z+v'_{z'}.$$

Si m est la masse du point quelconque, la puissance vive totale du système au même instant auquel se rapportent ces vitesses, est

$$\sum \frac{1}{2} mv^2,$$

ou $$\sum \frac{1}{2} m\,(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\,;$$

et en y substituant les valeurs précédentes de v_x, v_y, v_z, cette quantité devient

$$\sum \frac{1}{2} m\left[(V_x+v'_{x'})^2+(V_y+v'_{y'})^2+(V_z+v'_{z'})^2\right],$$

ou en développant

$$\sum \frac{1}{2} m(V_x^2+V_y^2+V_z^2)+\sum \frac{1}{2} m(v'^2_{x'}+v'^2_{y'}+v'^2_{z'})+\sum mV_xv'_{x'}$$
$$+\sum mV_yv'_{y'}+\sum mV_zv'_{z'}.$$

Les trois dernières sommes ont les facteurs V_x, V_y, V_z respectivement communs à tous leurs termes ; elles équivalent à

$$V_x\sum mv'_{x'}+V_y\sum mv'_{y'}+V_z\sum v'_{z'}.$$

Or, les quantités $\sum mv'_{x'}$, $\sum mv'_{y'}$, $\sum mv'_{z'}$, étant pour le système considéré relativement aux axes mobiles, les sommes des quantités de mouvement de tout le système projetées sur

des axes coordonnés menés par le centre de gravité, ces quantités sont nulles (102). Donc la puissance vive ci-dessus calculée se réduit à

$$\sum \frac{1}{2} m(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \sum \frac{1}{2} m(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2),$$

ou plus simplement (30) à

$$\frac{1}{2}(\sum m)\, V^2 + \sum m v'^2.$$

C'est ce qui peut s'énoncer comme il suit :

Dans un système matériel quelconque en mouvement, la puissance vive totale peut se décomposer en deux parties, dont l'une est la puissance vive qu'aurait le système si toute la masse était condensée au centre de gravité, et l'autre est la puissance vive totale qu'on trouverait en ne tenant compte que du mouvement du système relativement à des axes mobiles menés par le centre de gravité et se transportant parallèlement à eux-mêmes.

CHAPITRE IV.

DU CALCUL DU TRAVAIL DES FORCES APPLIQUÉES A DIFFÉRENTS POINTS D'UN SYSTÈME MATÉRIEL.

§ 1er. *De la somme des travaux de deux forces égales et directement opposées appliquées à deux points différents en mouvement.*

111. Dans le calcul de l'effet des forces appliquées aux divers points d'un même corps, on a souvent à considérer, comme nous le verrons plus tard, la somme algébrique des travaux de ces forces. La détermination de cette somme est une question de géométrie dont nous allons, dans ce paragraphe et dans le suivant, étudier les cas les plus simples et les plus utiles.

112. Lemme de géométrie infinitésimale. *Les points* A, A′ (fig. 11) *étant à une distance finie l'un de l'autre, si l'on considère deux points* B, B′, *infiniment rapprochés l'un de* A, *l'autre de* A′, *la différence entre la distance* BB′ *et sa projection orthogonale* PQ *sur la droite* AA′ *est un infiniment petit d'un ordre supérieur, c'est-à-dire, qu'elle est infiniment petite par rapport à la somme des distances infiniment petites* AB, A′B′.

Démonstration. Soient $AB = s$, $A'B' = s'$, $BC = z$, $CP = y$, $B'C' = z'$, $C'Q = y'$, $BB' = l$, $PQ = p$.

Les angles C, P, C′, Q étant droits, on a

$$l = \sqrt{p^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2};$$

d'où il résulte

$$l < p + \frac{(y' - y)^2}{2p} + \frac{(z' - z)^2}{2p},$$

car le quarré de cette dernière quantité est plus grand que $p^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$ ou l^2;

donc $$l - p < \frac{(y'-y)^2}{2p} + \frac{(z'-z)^2}{2p}.$$

Les coordonnées z, y sont toutes deux plus petites que s; de même z' et y' sont plus petites que s'; donc, quels que soient les signes de ces quantités, on a

$$(y'-y)^2 < (s+s')^2 \quad \text{et} \quad (z'-z)^2 < (s+s')^2;$$

donc $$l - p < \frac{(s+s')^2}{p};$$

donc le rapport de $l-p$ à la somme infiniment petite $s+s'$ est moindre que la fraction infiniment petite $\frac{s+s'}{p}$, ce qu'il fallait démontrer.

113. Cette proposition conduit à une expression simple de *la somme de travail de deux forces égales et directement opposées appliquées à deux points différents en mouvement.*

Un des points mobiles parcourt la courbe ABD (*fig.* 12), et l'autre la courbe A'B'D'. Une force F, d'abord supposée constante en intensité, est appliquée au premier mobile suivant les directions successives AF, BF....., DF, passant par A', B'....., D', tandis qu'une force égale F' agit sur le second mobile, suivant les droites A'F', B'F'...., D'F', passant par A, B...., D. Les forces F, F' produiront chacune un travail, et il s'agit d'évaluer la somme algébrique des deux travaux pris avec leurs signes.

Soient BC, B'C' ou ds, ds' deux arcs infiniment petits décrits simultanément; α, α' leurs angles avec les forces F, F'. Ces angles ne sont pas constants, mais varient aussi peu qu'on veut pendant le parcours des chemins BC, B'C'. Donc, sauf une erreur qu'on rendra de plus en plus *négligeable* en prenant ces arcs plus petits, les travaux élémentaires correspondants seront

$$Fds.\cos\alpha, \qquad F'ds'.\cos\alpha',$$

et leur somme

$$F(ds.\cos\alpha + ds'.\cos\alpha').$$

Si des points C, C' on abaisse sur la droite BB' les perpendiculaires CP, C'P', on aura $BP = ds\cos\alpha$, $B'P' = ds'\cos\alpha'$, et

l'expression précédente du travail élémentaire se changera en F(BP + B'P') ou F(PP' — BB').

Or, d'après le lemme précédent, on peut, sauf une nouvelle erreur de plus en plus *négligeable*, substituer à PP' la longueur CC', de manière que la somme des travaux élémentaires devient F(CC' — BB'), c'est-à-dire, le produit de l'une des deux forces par l'accroissement infiniment petit de la distance des deux mobiles; ce qu'on peut exprimer par Fdl.

Donc entre les positions initiales A, A', dont la distance AA' est l_0 et les positions finales D, D', dont la distance est l, la somme des deux travaux est exactement $F(l - l_0)$, intégrale de la quantité Fdl.

114. Si les deux forces F, F', varient d'intensité, quoique toujours égales entre elles et directement opposées, la somme de leurs travaux sera évidemment, d'après ce qui précède,

$$\int_{l_0}^{l} Fdl. \qquad [18]$$

115. Dans la figure 11, les forces sont répulsives et les points mobiles s'écartent successivement; le travail total est alors positif. Si les forces restant répulsives les points se rapprochaient, soit en vertu des vitesses acquises, soit par l'effet d'autres forces, le travail total des deux forces opposées serait négatif. Si les forces étaient attractives, la somme de leurs travaux serait positive ou négative suivant que les points d'application s'approcheraient ou s'écarteraient; la formule [18] ci-dessus s'appliquerait alors en donnant à F le signe —, dl devant d'ailleurs être positive ou négative, selon que la distance l augmente ou diminue.

116. De ce qui précède résulte la proposition suivante:

THÉORÈME. *Lorsque deux forces constantes ou variables, mais toujours égales et directement opposées, sont appliquées à deux points en mouvement, la somme de leurs travaux ne dépend que du mouvement relatif des deux points, et est par conséquent égale au travail que l'une des forces produirait seule si le mouvement du point auquel elle s'applique se réduisait à l'éloigner ou à le rapprocher de l'autre point supposé fixe.*

117. Corollaire. Dans le cas particulier où les deux points d'application de deux forces égales et directement opposées restent, pendant leur mouvement, à une distance invariable l'un de l'autre, les travaux de ces deux forces sont toujours égaux et de signes contraires, puisque le facteur dl est constamment nul.

§ 2. *Du travail de plusieurs forces appliquées aux divers points d'un système solide.*

1° Cas où le système solide a un mouvement de translation.

118. Considérons un temps très-court pendant lequel tous les points du système décrivent des chemins égaux et parallèles (44). Soit dx la longueur commune de ces petits chemins, et soit Ox un axe qui leur soit parallèle et de même sens. La projection orthogonale de chaque force F sur la direction du chemin de son point d'application sera égale à la projection de cette même force sur l'axe Ox. Donc la somme du travail des forces sera $\sum dx \mathrm{F} \cos(\mathrm{F},x)$ ou $dx \sum \mathrm{F} \cos(\mathrm{F},x)$, attendu que dx est un facteur commun à tous les termes de la somme. De là la proposition suivante :

Théorème. *La somme des travaux élémentaires des forces appliquées à un système solide, pendant le mouvement de translation de ce système, est égale au chemin élémentaire de l'un de ses points multiplié par la somme des projections des forces sur un axe parallèle à la vitesse de translation.*

C'est ce que nous écrivons ainsi d'une manière abrégée :

$$d \sum \mathcal{E}\mathrm{F} = dx \sum \mathrm{F}_x$$

2° Cas où le système solide tourne autour d'un axe.

119. Soit M (*fig.* 13) le point d'application d'une force F, point qui fait partie d'un système solide tournant autour d'un axe fixe. Par ce point faisons passer perpendiculairement à l'axe fixe un plan que nous prendrons pour celui de la figure; soit A la projection de l'axe sur ce plan. Considérons un temps très-court pendant lequel tous les points du système décrivent des arcs d'un même nombre de degrés (47), et soit $d\sigma$ le dé-

placement angulaire du système pendant ce temps, c'est-à-dire, l'arc décrit par un point qui, lié invariablement au système, serait à une unité de distance de l'axe.

Si l'on désigne par ds l'arc décrit pendant le même temps par le point M, et si l'on appelle r sa distance à l'axe A, on a

$$ds = rd\sigma.$$

Pour obtenir le travail de la force F pendant que son point d'application M décrit le chemin ds, il faut multiplier cet arc par la projection de la force sur la tangente MT, menée à ce même arc dans le sens du mouvement (73). Pour cela, soit d'abord P (représentée dans la figure par MB) la projection de la force F sur le plan de l'arc décrit, qui est le plan de la figure, et soit α l'angle que cette projection fait avec la tangente. Il est aisé de voir que la projection de la force F sur la tangente MT est aussi la projection de P sur cette tangente, de sorte qu'elle est représentée par MC et exprimée par $P\cos\alpha$. En effet, imaginons que la force F soit représentée par une droite MN; le point B est le pied de la perpendiculaire abaissée du point N sur le plan de la figure, et la droite BC étant perpendiculaire sur MT, le point C, suivant une proposition connue de la géométrie élémentaire, est aussi le pied de la perpendiculaire menée du point N sur MT. Ainsi, le travail élémentaire de F est

$$ds.\,P\cos\alpha \quad \text{ou} \quad d\sigma\,.\,Pr\cos\alpha.$$

Or l'inspection de la figure apprend que la quantité $r\cos\alpha$ est égale à OK, plus courte distance de la force F à l'axe O, prise avec le signe + ou —, selon que l'angle α est aigu ou obtus. Donc, si l'on représente cette distance OK par p, le travail élémentaire de F se trouve égal à

$$\pm\, d\sigma\, Pp.$$

Si au lieu d'une force il y en a plusieurs appliquées au même système solide, leurs travaux élémentaires respectifs dans le même temps auront tous de pareilles expressions dans lesquelles le facteur $d\sigma$ sera commun.

120. Définition. *Le produit* $\pm$Pp *que l'on obtient en multi-*

pliant la projection P *d'une force* F *sur un plan perpendiculaire à un axe par la distance* p *de la force à l'axe, et en affectant le résultat du signe qui convient au travail de la force dans le mouvement de rotation de son point d'application autour de l'axe, s'appelle le* MOMENT *de la force* F *par rapport à cet axe.*

121. De cette définition et de la formule précédente étendue à un nombre quelconque de forces, résulte la proposition que voici :

THÉORÈME. *La somme des travaux élémentaires des forces appliquées à un système solide, pendant le mouvement de rotation de ce système autour d'un axe fixe, est égale au déplacement angulaire infiniment petit du système, multiplié par la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation.*

C'est ce que nous exprimerons par la notation suivante :

$$d\sum \mathfrak{G}F = d\sigma \sum \mathfrak{M}_A F,$$

en désignant par $\mathfrak{M}_A F$ le moment d'une des forces F par rapport à l'axe A.

122. REMARQUE. *Le moment* Pp *d'une force* F *d'intensité quelconque est nul quand la force* F *est dans un même plan avec l'axe* A ; car on a $p = 0$ si la force rencontre l'axe, et $P = 0$ si la force est parallèle à cet axe. La réciproque de cette proposition est également vraie.

§ 3. *Du travail dû à la pesanteur dans le mouvement d'un système matériel quelconque.*

123. Comme nous l'avons dit (88), le poids d'un corps, dans un lieu déterminé, est une force constante. Sa direction est verticale et son intensité varie avec la latitude et la distance au centre de la terre. Mais, dans les cas ordinaires, et particulièrement dans ceux de la mécanique industrielle, le poids d'un point matériel en mouvement peut être considéré comme une force constante en intensité, et parallèle à une même direction. Par conséquent, à cette force s'applique l'observation faite au n° 78, et déduite de la définition générale du travail d'une force. De là résulte cette règle aussi simple qu'utile :

Si parmi les causes quelconques du mouvement d'un point

matériel on considère séparément son poids, le travail de cette force entre deux positions quelconques M_0, M (*fig.* 14), *de son point d'application est égal au produit de l'intensité constante de cette même force par la hauteur* MN, *dont le point, dans sa seconde position, se trouve au-dessous du plan horizontal passant par la première position, quelle que soit d'ailleurs la courbe* M_0M. *Si le point* M *est plus élevé que* M_0, *le travail dont il s'agit est négatif.*

Ainsi, en désignant par p le poids du point matériel considéré, par h la hauteur dont ce point s'est définitivement abaissé, quantité négative quand le point s'est élevé, le travail dû à la pesanteur dans ce déplacement est ph.

Autrement, si l'on représente par z_0 et z les ordonnées du point dans ses deux positions, initiale et finale, par rapport à un plan horizontal, le sens positif de ces ordonnées étant pris de haut en bas, le travail du poids p est $p(z-z_0)$.

124. Cherchons maintenant l'expression du travail dû à la pesanteur dans un système matériel quelconque en mouvement, quelles que soient les autres causes de ce mouvement. Nous ne ferons aucune hypothèse sur la nature de ce système, qui peut être solide, ou flexible, ou liquide, ou même composé de parties n'ayant entre elles aucune liaison.

Si les poids des divers points du système sont p', p'', p''', ...; si leurs ordonnées initiales et finales, prises verticalement de haut en bas, par rapport à un plan horizontal, sont z'_0, z''_0, z'''_0, ..., z', z'', z'''...; le travail total dû à la pesanteur, pendant que le système passe de la première position à la dernière, sera

$$p'(z'-z'_0)+p''(z''-z''_0)+p'''(z'''-z'''_0)+\ldots.$$

ou bien :

$$p'z'+p''z''+p'''z'''+\ldots\ldots-(p'z'_0+p''z''_0+p'''z'''_0+\ldots.);$$

ce que nous exprimons en abrégé par l'équation

$$\sum \mathcal{E}p=\sum pz-\sum pz_0.$$

En désignant par Z_0 et Z les ordonnées, initiale et finale, du centre de gravité, et par P le poids total du système, cette for-

mule se transforme (98) en celle-ci :

$$\sum \mathcal{T}p = PZ - PZ_0 \qquad \text{ou} \qquad \sum \mathcal{T}p = P(Z - Z_0). \quad [19]$$

Donc, *dans un système quelconque, en mouvement, le travail dû à la pesanteur est égal au poids total du système multiplié par la hauteur dont le centre de gravité s'est abaissé.*

Il est bien entendu que si ce point s'est élevé, la hauteur est négative ainsi que le travail.

125. *Cas où le calcul du travail dû à la pesanteur se simplifie.* Soit un système *abcd* (*fig.* 15), partagé dans sa position initiale en deux groupes *efdc*, *abef*, dont les poids sont P', P'', et dont les centres de gravité ont les ordonnées Z'_0, Z''_0. On a (98) $P = P' + P''$ et $PZ_0 = P'Z'_0 + P''Z''_0$.

Si le système, dans sa position finale EFIH, peut se partager en deux groupes nouveaux EFDC, CDIH, dont les poids soient encore P' et P'', et si, en outre, l'un de ces groupes a son centre de gravité au même lieu ou seulement au même niveau que le groupe de même poids dans la première position, de sorte que les ordonnées des centres de gravité des deux nouvelles parties du système soient Z'_0, Z'', on a : $PZ = P'Z'_0 + P''Z''$.

Donc le travail $P(Z - Z_0)$ se réduit à $P''(Z'' - Z''_0)$, c'est-à-dire, *au produit du poids* P'' *commun aux deux groupes* abef, CDIH, *dont les centres de gravité, l'un initial et l'autre final, ne sont pas au même niveau, multiplié par leur différence de niveau.*

Le travail dû à la pesanteur est donc le même, dans ce cas, que si les éléments du groupe initial *abef* étaient venus prendre la position finale CDIH.

Ce cas se rencontre dans plusieurs questions d'Hydraulique.

DEUXIÈME SECTION.

DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL.

CHAPITRE PREMIER.

MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL.

126. Le mouvement le plus général d'un corps est un phénomène très-compliqué. Non-seulement ce corps considéré dans son ensemble se transporte d'un lieu dans un autre, mais en même temps il peut tourner sur lui-même, ct les parties dont il se compose changent plus ou moins de distances entre elles.

C'est pour simplifier notre étude que nous nous occuperons d'abord de l'effet des forces sur des *points matériels*, qui ne diffèrent des corps ordinaires qu'en ce qu'ils sont très-petits et invariables de forme.

§ 1er. *Mouvement rectiligne et uniforme d'un point matériel.*

127. Il résulte du *principe de l'inertie* (58) qu'un point matériel en repos y persiste s'il n'est sollicité par aucune force. La réciproque n'est pas vraie; mais si un point matériel reste en repos, quoique sollicité par une force, on peut affirmer qu'il est en même temps sollicité par une ou plusieurs autres forces. On dit alors que toutes les forces qui agissent sur le point sont en *équilibre.*

On verra bientôt les conditions de cet équilibre.

128. Il résulte du même principe de l'inertie, que si un point matériel, après avoir été mis en mouvement par des forces quelconques, est abandonné à lui-même, c'est-à-dire, qu'il cesse d'être actuellement sollicité par une force, il se mouvra

d'un mouvement rectiligne uniforme, suivant la tangente à l'arc qu'il a fini de décrire à l'instant où toute force a cessé d'agir, et avec la même vitesse qu'il possédait au dernier point de cet arc.

C'est pour cela qu'on définit quelquefois la vitesse d'un point dans le mouvement varié, en disant que c'est la vitesse du mouvement uniforme qu'il conserverait si toute force cessait d'agir sur ce point à l'instant considéré. Parler ainsi, c'est sans doute exprimer une vérité, mais ce n'est pas définir convenablement la vitesse, dont l'idée est indépendante de l'inertie de la matière et de la notion des forces.

129. Un pointmatériel peut, quoique actuellement sollicité par des forces, persister dans un mouvement rectiligne uniforme. On verra ci-après, que dans ce cas les forces satisfont aux conditions de l'équilibre.

§ 2. *Mouvement varié rectiligne produit par une force constante. Sa théorie fondée sur le principe général des mouvements relatifs.*

130. On peut se faire une idée d'une force constante agissant seule sur un corps, en imaginant que la pesanteur cesse d'exister et en supposant le corps continuellement poussé ou tiré par l'intermédiaire d'un ressort qui resterait toujours tendu de la même manière, malgré la rapidité que le mouvement finirait par acquérir.

Une force constante F agissant sur un point matériel d'abord en repos, mais libre, c'est-à-dire, ne recevant l'action d'aucune autre force, le met en mouvement dans une direction qui est celle de la force. Ce corps ayant acquis au bout d'un certain temps t une certaine vitesse v, on exprime ce fait en disant que la force constante F appliquée au corps considéré lui a imprimé la vitesse v dans le temps t.

131. Nous nous occuperons, dans ce paragraphe, du mouvement d'un point matériel qui, possédant, à l'instant pris pour instant initial, une vitesse due à des causes antérieures quelconques, reçoit, à partir de cet instant, l'action d'une force

constante dirigée suivant la même droite que la vitesse initiale et dans le même sens ou en sens contraire.

La théorie de ce mouvement présente deux questions à résoudre : 1° Déterminer l'espèce de mouvement qui résulte de ce que la force est constante, quelle que soit d'ailleurs son intensité ;

2° Déterminer l'influence de cette intensité en comparant les mouvements de deux points matériels égaux soumis à deux forces constantes différentes.

132. La solution de la première question repose sur le principe suivant, emprunté à la physique expérimentale :

Lorsqu'un système quelconque de points matériels possède un mouvement de translation rectiligne et uniforme (45), *si un autre point, ayant à un certain instant (en vertu de causes antérieures quelconques) la vitesse d'entraînement du système* (35), *reçoit à partir de cet instant l'action d'une ou de plusieurs forces, il prend, relativement au système, le même mouvement que ces forces lui imprimeraient si le mouvement commun n'existait pas.*

C'est ainsi que sur un bateau transporté d'un mouvement rectiligne uniforme les mouvements relatifs que nous exécutons ou que nous imprimons aux corps emportés avec nous, sont les mêmes qu'ils seraient si le bateau était en repos.

133. De cette loi de la nature résulte la proposition suivante :

Théorème. *Si un point matériel possédant une vitesse initiale quelconque est sollicité par une force constante et unique, dirigée suivant la même droite que cette vitesse, son mouvement est uniformément varié, et son accélération indépendante de la vitesse initiale est de même sens que la force.*

En effet, quelle que soit la vitesse v, à un instant quelconque, si on suppose le mobile entouré d'une enveloppe éloignée, dont tous les points aient cette même vitesse v, et la conservent uniformément, le point sollicité par la force pendant un temps déterminé, recevra dans cette enveloppe une vitesse relative indépendante de la vitesse d'entraînement v, et parallèle à cette vitesse ; or, dans ce cas, la vitesse relative n'est autre chose que la variation de la vitesse absolue pendant le temps considéré (39) ; il s'en-

suit que, dans des temps égaux quelconques, les variations positives ou négatives de la vitesse sont égales et indépendantes de la vitesse initiale.

On remarquera que si la force agit dans un sens négatif, la variation de la vitesse est négative, quoique nous lui conservions le nom d'*accélération* lorsqu'elle est rapportée à l'unité de temps (10). Il en résulte que la même force qui, agissant dans le sens positif, imprime à un mobile une accélération positive, produirait sur le même mobile une accélération négative numériquement égale, si elle agissait en sens contraire (*).

Si l'on désigne

Par x_o la distance du point matériel, pour l'instant initial, à compter d'un point fixe de la droite qu'il parcourt;

Par v_o, sa vitesse à ce même instant;

Par x et v, les quantités analogues à la fin du temps t;

Par j l'accélération constante du mouvement,

le théorème précédent est exprimé algébriquement par l'une ou l'autre des trois équations ci-après, dont les deux dernières sont les conséquences de la première (14 et 15):

$$\frac{dv}{dt} = j,$$
$$v = v_o + jt,$$
$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} jt^2.$$

On verra au paragraphe suivant comment la quantité j, constante pour un même corps et une même force, varie

(*) Le théorème précédent comprend le cas où le point matériel, après avoir été mis en mouvement par des forces quelconques, se trouve abandonné à lui-même : la force agissante étant nulle, le point, d'après le principe du n° 132, reste en repos relatif dans l'enveloppe animée de la vitesse acquise, et par conséquent conserve cette vitesse sans altération. Il suffirait donc d'admettre la première propriété de l'inertie telle qu'elle est énoncée au n° 127 et le principe posé au n° 132, pour en conclure comme conséquence nécessaire la seconde propriété de l'inertie exprimée au n° 128.

pour différentes forces appliquées respectivement à différents corps. Cherchons d'abord la solution de la seconde question posée au n° 131.

134. Cette solution repose sur le principe suivant, lequel ne doit pas être confondu avec celui du n° 132, qui n'en est qu'un cas particulier. La différence consiste en ce que le mouvement de translation commun, qui est uniforme au n° 132, devient ici un mouvement varié rectiligne quelconque.

PRINCIPE GÉNÉRAL DES MOUVEMENTS RELATIFS.

Lorsqu'un système quelconque de points matériels possède un mouvement de translation rectiligne varié, si un autre point ayant à un certain instant la vitesse d'entraînement du système, reçoit, à partir de cet instant, en outre de la force nécessaire pour le faire participer à l'accélération du système, l'action d'une ou de plusieurs forces, il prend, relativement au système, le même mouvement que ces dernières forces lui imprimeraient, si les vitesses et les forces qui se rapportent au mouvement commun n'existaient pas.

Cette loi de la nature ne peut être soumise à une expérience directe et rigoureuse; elle est vérifiée par l'accord des conséquences qu'on en tire avec les faits observés, surtout en astronomie. Elle conduit à la proposition suivante :

135. Théorème. *Deux points matériels égaux sollicités par des forces inégales agissant dans la direction de leurs vitesses initiales, reçoivent des accélérations proportionnelles à ces forces.*

Nous entendons par *points matériels égaux* ceux qui, sollicités par des forces égales, prendraient la même accélération.

Soit 2F l'une des forces, double de l'autre, désignée par F. Si l'on appliquait aux deux points égaux, d'abord en repos, deux forces égales F supposées parallèles, les deux points marcheraient d'un mouvement commun et uniformément accéléré (133). Mais l'un des corps recevant en outre, dès l'instant du départ, une seconde force F, prend, par rapport à l'autre corps, au bout d'un temps quelconque, une vitesse relative égale à la vitesse absolue que la force unique F imprime dans le même temps au second corps. Donc le pre-

mier possède, à un instant quelconque, une vitesse double, et par conséquent il a constamment une accélération double de celle du second.

On démontrerait de même la proposition pour le cas où l'une des forces serait 2, 3, 4. . . . . . n fois l'autre.

Enfin, si les forces sont dans le rapport de deux nombres entiers n, n', ou représentées par nF_1 et $n'F_1$, en désignant par j_1 l'accélération due à l'action de F_1 sur l'un des points égaux considérés, on voit que les accélérations produites par nF_1 et $n'F_1$ sont nj_1 et $n'j_1$: elles sont par conséquent proportionnelles aux forces.

136. Corollaire. *Un point matériel sollicité par une force variable agissant dans la direction de la vitesse initiale, reçoit à deux instants quelconques des accélérations proportionnelles aux intensités de la force à ces deux instants.*

Cette proposition résulte immédiatement de la précédente dans le cas où la force agissante reste constante, à partir de chacun des instants considérés, pendant un certain temps, quelque court qu'il soit. Elle subsiste donc quand ce temps devient infiniment petit, c'est-à-dire, quand la force, variant d'une manière continue, l'accélération variable est exprimée par $\frac{dv}{dt}$ (10).

§ 3. *Détermination numérique de l'accélération produite par une force donnée sur un corps d'un poids donné.*

137. Il résulte du théorème précédent que si F, F', désignent deux forces quelconques, et j, j', les accélérations qu'elles imprimeraient en agissant seules sur un certain point matériel, on a

$$\frac{F}{F'}=\frac{j}{j'}; \qquad [20]$$

d'où il suit que, pour déterminer j, il suffit

1° De faire une expérience qui donne l'accélération j' produite sur le corps dont il s'agit par une force connue F';

2° D'avoir le rapport de F à F'.

138. Or, un phénomène naturel très-remarquable nous fournit cette expérience, pourvu que nous admettions que tous les mouvements observés dans une médiocre étendue à la surface de la terre sont les mêmes qu'ils seraient si, notre globe devenant immobile, le poids des corps restait cependant ce qu'il est (*). Ce phénomène consiste en ce que *tout corps abandonné dans le vide à l'action de la pesanteur, c'est-à-dire, soumis à la seule force qui s'appelle son poids, prend un même mouvement uniformément accéléré* (14). A la latitude de Paris, l'accélération de ce mouvement est $9^{m},8088$. Nous la désignons par g, et par conséquent les équations du mouvement vertical des corps dans le vide sont (133)

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \\ v &= v_0 + g t, \\ \frac{dv}{dt} &= g, \end{aligned}\right\} \qquad [21]$$

le sens positif des distances verticales x_0, x, et des vitesses v_0, v étant de haut en bas.

En des lieux dont la latitude ou la distance au centre de la terre diffèrent beaucoup, l'accélération due à la pesanteur n'est pas exactement la même : à l'équateur, elle est d'environ $0^{m},03$ plus petite qu'à Paris. Dans les applications, on peut faire $g = 9^{m},81$, et $\frac{1}{g} = 0,102$.

139. Du fait expérimental que nous venons de rappeler résultent plusieurs conséquences importantes, savoir :

1° Le poids d'un corps est une force constante, puisque le mouvement qui résulte de cette force, quand elle agit seule, est un mouvement *uniformément* varié (136).

2° Deux points matériels de même poids P sont ce que nous avons appelé (135) deux points matériels égaux, puisque sous l'action de forces égales ils prennent la même accélération g.

(*) L'exactitude de cette hypothèse sera démontrée plus loin (268).

3° Dans l'équation $\frac{F}{F'} = \frac{j}{j'}$ [20] relative aux divers mouvements d'un même mobile, on peut mettre simultanément pour F' le poids P du mobile, et pour j' l'accélération g due à la force P lorsqu'elle agit seule sur ce corps, et l'on aura

$$\frac{F}{P} = \frac{j}{g}, \quad \text{d'où} \quad j = \frac{gF}{P},$$

c'est-à-dire que *l'accélération constante qu'imprime une force* F *agissant seule sur un point matériel est à la longueur* g, *accélération due à la seule pesanteur, comme la force* F *est au poids* P *du même mobile, ce poids étant pris au même lieu où est observée l'accélération* g.

140. La relation $\frac{F}{P} = \frac{j}{g}$ donne aussi $F = P\frac{j}{g}$. Donc si l'on demande quelle est la force f qui imprimerait, au corps dont le poids est P, l'accélération *un mètre*, il faut, dans cette dernière formule, faire $F = f$, $j = 1$, et continuer de désigner par g le nombre *abstrait* 9,81; d'où $f = \frac{P}{g}$, résultat conforme à ce qui a été annoncé au n° 88.

141. Les équations précédentes peuvent être mises sous la forme $\frac{F}{j} = \frac{F'}{j'} = \frac{P}{g}$; c'est-à-dire, que *si l'on divise des forces quelconques chacune par l'expression numérique de l'accélération qu'elle imprimerait en agissant seule sur un point matériel, le quotient est constant tant qu'il s'agit d'un même corps.*

§ 4. *Questions sur le mouvement vertical des corps dans le vide.*

142. Avant d'aller plus loin dans la théorie générale du mouvement rectiligne d'un point matériel, nous nous arrêterons un peu sur le cas particulier du mouvement vertical des corps abandonnés à la seule action de la pesanteur et à l'effet d'une vitesse initiale.

Les équations de ce mouvement sont celles [21] du n° 138 :

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \quad v = v_0 + g t, \quad \frac{dv}{dt} = g.$$

Ces formules se simplifient en prenant la position initiale du mobile pour origine des x, c'est-à-dire, en faisant $x_0 = 0$: on a

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{et} \quad v = v_0 + gt;$$

et en éliminant t, $\quad v^2 - v_0^2 = 2gx.$

143. Si v est la vitesse acquise en tombant d'une hauteur h sans vitesse initiale, on a, en faisant $v_0 = 0$, et $x = h$,

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{et} \quad v = gt,$$

d'où $$v = \sqrt{2gh} = 4,43 \sqrt{h},$$

et $$h = \frac{v^2}{2g} = 0,051\ v^2.$$

Le temps ou la durée de la chute est

$$t = \frac{v}{g} = 0,102 v, \quad \text{ou} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,45 \sqrt{h}.$$

Si h_1 est la hauteur que parcourt dans la première seconde le corps en tombant sans vitesse initiale, on a

$$h_1 = \frac{1}{2} g = 4^m,904.$$

144. Si le corps est lancé verticalement de bas en haut, on peut prendre dans ce sens les x positives; mais alors l'accélération g est négative (133), et les équations du n° 138 deviennent

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad v = v_0 - gt, \text{ d'où } v^2 - v_0^2 = -2gx. \quad [22]$$

La vitesse v décroît, mais reste positive, c'est-à-dire, ascensionnelle, jusqu'à ce qu'on ait $gt = v_0$.

La hauteur h dont s'est alors élevé le mobile, est la valeur de x qui s'obtient en faisant dans la première équation $t = \frac{v_0}{g}$: c'est $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

A partir de cet instant, le corps descend, puisque la vitesse v devient négative; si on le considère après un nouvel intervalle de temps égal à celui de l'ascension, et qu'on fasse, par conséquent, $t = \frac{2v_0}{g}$ dans les équations [22], on trouve

$x = 0$, et $v = -v_0$, c'est-à-dire, que le corps est revenu au point de départ, et a repris la vitessse initiale, mais en sens contraire. Tout point de passage du mobile pouvant être pris pour origine des x, on voit, sans autre calcul, qu'un corps lancé verticalement met le même temps à parcourir un même espace, soit en montant, soit en descendant, et qu'aux deux instants de son passage à un même point, sa vitesse a la même intensité.

On arriverait aux mêmes conclusions en faisant la vitesse v_0 négative dans les équations du n° 138, qui supposent les x positives dans le sens descendant.

145. La hauteur h, égale à $\frac{v^2}{2g}$ ou $0{,}051\, v^2$, s'appelle la *hauteur due à la vitesse* v : c'est la hauteur à laquelle s'élève un corps lancé verticalement avec la vitesse ascensionnelle v, et c'est aussi la hauteur dont doit tomber un corps sans vitesse initiale pour acquérir la vitesse v.

La vitesse v, égale à $\sqrt{2gh}$ ou $4{,}43\sqrt{h}$, s'appelle la *vitesse due à la hauteur* **h.**

146. *Problèmes proposés comme exercice en négligeant la résistance de l'air.*

1° Déterminer la profondeur x d'un puits d'après le temps T qui s'écoule depuis le départ d'un corps tombant, jusqu'à l'arrivée du bruit de sa chute, la vitesse du son dans l'air étant de $337^{m} = a$.

On trouve $x = a\left(\mathrm{T} - \frac{a}{g}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2g\mathrm{T}}{a}}\right)\right)$.

2° Un corps, en tombant du point O a parcouru de A en B, un espace h en un temps θ, plus petit que $\sqrt{\frac{2h}{g}}$; déterminer le point supérieur d'où il est tombé, c'est-à-dire, la distance OA.

3° Deux corps avec ou sans vitesses initiales partant à des instants différents, l'un de O, l'autre de A, déterminer le lieu et l'instant de leur rencontre sur la verticale.

4° Deux corps partent sans vitesses initiales d'un même point à deux instants qui peuvent être très-rapprochés; dé-

terminer l'instant où ils seront séparés par un intervalle donné, et les chemins qu'ils auront alors parcourus.

§ 5. *Relation entre la masse d'un point matériel, la force qui le sollicite et l'accélération que cette force lui imprime.*

147. Considérons deux points matériels que, pour abréger, nous appellerons A et A_1, et que nous supposerons en général inégaux, c'est-à-dire, tels que, sous l'action de forces égales, ils prennent des accélérations inégales. Désignons par F, F_1, deux forces appliquées respectivement à ces deux corps, et par j, j_1, les deux accélérations qui en résultent.

Il suit du théorème du n° 135, et de son corollaire n° 141, que les deux quotients $\frac{F}{j}$, $\frac{F_1}{j_1}$, différents entre eux, en général, parce qu'ils s'appliquent à deux corps distincts A, A_1, restent constants pour chaque corps, quelle que soit la force qu'on adopte pour dividende, pourvu qu'on prenne en même temps pour diviseur l'accélération correspondante à cette force supposée appliquée au corps considéré.

Cela posé, supposons que nous voulions imprimer aux deux corps A, A_1, une même accélération J, et soient φ, φ_1, les forces respectives nécessaires à cet effet.

Nous aurons $\frac{\varphi}{J}=\frac{F}{j}$, $\frac{\varphi_1}{J}=\frac{F_1}{j_1}$,

d'où $\varphi : \varphi_1 :: \frac{F}{j} : \frac{F_1}{j_1}$.

Ainsi *les quotients* $\frac{F}{j}$, $\frac{F_1}{j_1}$, *ci-dessus définis, sont entre eux dans le même rapport que deux forces* φ, φ_1 *qui, agissant sur les corps* A, A_1, *leur imprimeraient une même accélération d'ailleurs quelconque.*

148. On a vu (83) que les *masses* de deux points matériels sont proportionnelles aux forces capables de leur imprimer le même mouvement. Donc, les masses des corps A, A_1 que nous désignons par m, m_1, sont proportionnelles à φ et φ_1.

On peut donc, dans la proportion précédente, substituer m et m_1 à φ et φ_1.

Ainsi $$m : m_1 :: \frac{F}{j} : \frac{F_1}{j_1}, \qquad [23]$$

c'est-à-dire que *les masses de deux corps* A, A$_1$ *sont entre elles comme les quotients qu'on obtient en divisant deux forces quelconques* F, F$_1$, *supposées appliquées respectivement à ces deux corps, par les accélérations* j, j$_1$ *qu'elles leur feraient prendre.*

149. Cette proportion est indépendante du choix des unités de force, d'accélération et de masse. Elle se simplifie à l'aide d'une convention généralement adoptée en mécanique (86):

On prend pour unité de masse celle d'un corps qui, sous l'action d'une unité de force, prendrait l'unité d'accélération.

D'après cela, si dans la dernière proportion on fait F_1 et j_1 égales à leurs unités respectives, il faut faire en même temps m_1 égale à l'unité de masse.

On a ainsi :

$$m : \text{unité de masse} :: \frac{F}{j} : \frac{\text{unité de force}}{\text{unité d'accélération}},$$

ou enfin $$m = \frac{F}{j};$$

équation non-homogène, dont le véritable sens est exprimé par la proportion précédente.

150. Si on remplace (139) les quantités F et j respectivement par P et g, la dernière formule devient

$$m = \frac{P}{g}, \qquad [24]$$

c'est-à-dire *que la masse d'un corps est numériquement égale à son poids divisé par l'accélération due à ce même poids.*

151. L'accélération g étant constante pour tous les corps dans un même lieu, il s'ensuit que *les masses de plusieurs corps sont entre elles comme leurs poids pris dans un même lieu* (*).

(*) Si la pesanteur agissait inégalement sur des corps de masses égales, comme font les forces électriques et magnétiques, l'accéléra-

152. *Remarques.* 1° On pourrait se dispenser d'introduire dans les calculs de la mécanique industrielle la masse des corps et ne les spécifier que par leur poids; mais l'emploi de la masse donne, comme on le verra, plus de simplicité aux formules et aux énoncés des théorèmes. Dans les applications, on substitue à la masse m d'un corps quelconque le quotient de son poids P (à la latitude de Paris) divisé par g ou 9,81 si l'on prend le *mètre* et la *seconde de temps* pour unités.

2° On peut demander quel est le corps dont la masse est prise pour unité. Il suffit, pour le trouver, de faire $m=1$ dans l'équation $P=mg$. On aura $P=g$, c'est-à-dire que dans le système des unités de force, d'espace et de temps que nous adoptons, le poids de ce corps est de 9,81 kilogrammes.

3° On dit quelquefois que g mesure l'*intensité de la pesanteur.* Si cette locution n'est pas vicieuse, elle est au moins obscure, et nous voyons qu'il faut entendre par là que g est numériquement égal au poids de l'unité de masse.

153. Si de la formule $m=\frac{F}{j}$ du n° 149 on tire $j=\frac{F}{m}$, et si la force F étant supposée invariable, cette expression de l'accélération constante j est substituée dans les équations du n° 133, on aura les formules du mouvement rectiligne uniformément varié d'un point dont la masse est m, soumis à une force constante dont l'intensité est F,

savoir
$$\left.\begin{array}{l} \frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}, \quad v=v_0+\frac{F}{m}t, \\ x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2. \end{array}\right\} \qquad [25]$$

Il importe de remarquer que, dans ces équations, F doit avoir le même signe que l'accélération j dans les formules du

tion due au poids d'un corps ne serait plus indépendante de la nature de ce corps, et pour avoir sa masse il faudrait diviser son poids par l'accélération spéciale de son mouvement vertical dans le vide. Les masses ne seraient donc plus alors proportionnelles aux poids.

n° 133, de sorte que F est positive ou négative selon que la force agit dans le sens positif des x ou dans le sens contraire.

154. Si la force F est variable, on peut la considérer comme constante pendant un temps infiniment petit dt; dans cette durée, l'accroissement de la vitesse sera dv, et l'accélération à l'instant considéré sera $\frac{dv}{dt}$. On aura donc encore

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\mathrm{F}}{m} \quad \text{ou} \quad mdv=\mathrm{F}dt.$$

Cette relation doit être considérée comme l'*équation fondamentale de tout mouvement rectiligne.*

§ 6. *Relation de l'impulsion et de la quantité de mouvement dans le mouvement rectiligne.*

155. De l'équation $v=v_0+\frac{\mathrm{F}}{m}t$ du n° 153 on tire

$$mv-mv_0=\mathrm{F}t. \qquad [26]$$

Ainsi lorsqu'un point se meut en ligne droite sous l'action d'une seule force constante, si l'on calcule à deux instants quelconques le produit de sa masse par sa vitesse, la variation de ce produit aura même signe que la force, et même valeur numérique que le produit que nous sommes convenus (71) d'appeler *impulsion.*

Exemples. 1° Une balle de fusil pesant $\frac{1}{40}$ kilog. étant supposée avoir une vitesse de 420 mètres, si l'on admet que depuis l'instant du départ jusqu'à celui où cette vitesse a été acquise, la force ait été constante, on fera :

$$v_0=0,\quad v=410,\quad m=\frac{1}{40g},\quad mv=\frac{420\times 0{,}102}{40}=1{,}071$$

dans l'équation ci-dessus [26], qui devient $\mathrm{F}t=1{,}071$;

donc, suivant que l'action de la force a duré $1''$; $\frac{1''}{10}$; $\frac{1''}{100}$.....

son intensité a été en kilogrammes ... 1,071; 10,71; 107,1...

2° Si le même corps, à l'instant où il a la vitesse de 420 mètres, rencontre un autre corps qui anéantisse cette vitesse en

lui opposant une force constante, la même équation donnera l'impulsion résistante exercée par l'obstacle sur la balle en mouvement. On fera

$$v = 0, \quad v_0 = 420, \quad mv_0 = 1{,}071,$$

et l'on aura $$Ft = -1{,}071,$$

produit négatif, parce que la force est de sens contraire à la vitesse v_0 qu'elle détruit. Si l'on suppose, par exemple, que l'obstacle ait détruit la vitesse du mobile dans un temps de $0'',001$, on en conclura que la force a été de 1071 kilog.

On remarquera que nous appliquons à un corps de dimensions appréciables ce qui n'est encore établi que pour un point matériel. On verra plus tard (285) que cette extension est permise, et nous ne l'indiquons ici que pour rendre sensible par des nombres la signification de la formule

$$mv - mv_0 = Ft.$$

156. *Le produit* mv *de la masse d'un point matériel par sa vitesse à un instant déterminé* joue un rôle important dans la Mécanique, et s'appelle *la quantité de mouvement de ce corps* à l'instant considéré; expression bizarre que nous emploierons parce qu'elle est généralement adoptée.

157. On conclut aisément de la formule [26] que *dans le mouvement rectiligne les quantités de mouvement acquises par deux points matériels, pendant un même temps, sous l'action de forces constantes pour chaque corps, sont proportionnelles à ces forces.* Soient, en effet, m et m' les deux masses, $v - v_0$ et $v' - v'_0$ les vitesses acquises, pendant le temps t, par l'effet des forces constantes F et F'; on aura [26]

$$mv - mv_0 = Ft \quad \text{et} \quad m'v' - m'v'_0 = F't,$$

d'où $$\frac{mv - mv_0}{m'v' - m'v'_0} = \frac{F}{F'}.$$

Si l'on suppose que les deux corps soient partis du repos, au commencement du temps t, la proportiou se réduit à

$$\frac{mv}{m'v'} = \frac{F}{F'}.$$

Ainsi, *les quantités de mouvement de deux points matériels*

différents sont proportionnelles aux forces constantes qui ont pu les produire dans un même temps (*).

158. Nous allons étendre la relation [26] ci-dessus établie au cas où le point serait soumis à des forces diverses et successives, agissant toujours suivant la droite que suit le mobile en sens positif ou négatif.

Soient, pour un point dont la masse est m,

v_0 sa vitesse à un instant pris pour instant initial;

F_1 la force positive ou négative agissant dès cet instant;

θ_1 la durée de l'action constante de F_1;

v_1 la vitesse à la fin du temps θ_1;

F_2 la force qui succède à F_1;

θ_2 la durée de l'action de F_2;

v_2 la vitesse à la fin de cette seconde période;

F_3, θ_3, v_3 quantités analogues pour une troisième période;

F_n, θ_n, v, quantités analogues pour la $n^{\text{ième}}$ et dernière;

On aura, d'après le n° 155,

Pour la première période.......... $mv_1 - mv_0 = F_2\theta_1$;

Pour la seconde................. $mv_2 - mv_1 = F_2\theta_2$;

Pour la troisième................ $mv_3 - mv_2 = F_n\theta_n$;

....

Pour la $n^{\text{ième}}$ et dernière période..... $mv - mv_{n-1} = F_n\theta_n$;

d'où, en ajoutant, on tire

$$mv - mv_0 = F_1\theta_1 + F_2\theta_2 + F_3\theta_3 + \ldots\ldots + F_n\theta_n,$$

ce qui s'écrit, pour abréger, de cette manière

$$mv - mv_0 = \sum F\theta.$$

159. Cette dernière équation subsiste, quelque petits que soient les temps θ. Donc, si l'on suppose que la force varie d'une manière continue, on aura (*Géom. anal.*, 267)

(*) A une époque où l'on admettait l'existence de forces instantanées (70) on disait que la quantité de mouvement d'un point matériel exprimait la *force de ce corps* ou lui était proportionnelle (LAPLACE, *Exposition du système du monde*, liv. 3, chap. 3). Ce langage ne peut se concilier avec la définition actuelle du mot *force*.

$$mv - mv_0 = \int F dt. \qquad [27]$$

Ce résultat s'obtient immédiatement, mais d'une manière moins élémentaire, en intégrant l'équation $mdv = Fdt.$ (155)

160. D'après la définition (71) de l'impulsion, les trois cas auxquels sont relatives les équations des nos 156, 158 et 159, sont renfermés dans un énoncé commun, que nous aurons occasion de rappeler sous la désignation de théorème de la relation entre l'impulsion et la quantité de mouvement, ou, plus simplement, THÉORÈME DE L'EFFET DE L'IMPULSION dans le mouvement rectiligne d'un point matériel.

La variation de la quantité du mouvement est numériquement et algébriquement égale à l'impulsion des forces dans le même temps.

161. En considérant les deux cas particuliers où l'une des vitesses v_0, v est nulle, on voit que la quantité de mouvement possédée par un point matériel est :

1° De même valeur et de même sens que l'impulsion totale qu'il a reçue depuis qu'il est sorti du repos;

2° Égale et de sens contraire à l'impulsion nécessaire pour réduire ce point au repos.

162. Il est évident que si le mobile était soumis à des forces simultanées, agissant, soit dans le même sens, soit dans les deux sens contraires, mais toujours suivant la même droite, le même théorème s'appliquerait sans modification : dans ce cas, la force F, qui entre dans les calculs et formules ci-dessus, est la somme algébrique de celles qui agissent, et le résultat est le même, soit qu'on multiplie cette somme par l'élément du temps, soit qu'on fasse la multiplication avant d'effectuer l'addition des forces.

§ 7. *Relation du travail et de la puissance vive dans le mouvement rectiligne.*

163. Les deux dernières des équations [25] du n° 153, savoir :

$$v = v_0 + \frac{F}{m} t \quad \text{et} \quad x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} t^2,$$

conduisent à un résultat remarquable quand on élimine le temps t. Pour cela, on peut élever les deux membres de la première au quarré et multiplier ceux de la seconde par $2\frac{F}{m}$; on a ainsi

$$v^2 = v_0^2 + 2\frac{F}{m}v_0 t + \frac{F^2}{m^2}t^2,$$

$$2\frac{F}{m}(x - x_0) = 2\frac{F}{m}v_0 t + \frac{F^2}{m^2}t^2,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F(x - x_0). \qquad [28]$$

Ainsi, lorsqu'un point se meut en ligne droite sous l'action d'une seule force constante, si l'on calcule à deux instants quelconques la moitié du produit de sa masse par le quarré de la vitesse, la variation de cette quantité aura même valeur et même signe que le produit de la force totale multipliée par l'espace dont le mobile s'est avancé dans le sens de cette force, produit qui, d'après la définition du n° 74 et les observations des n°s 76 et 78, est le travail de cette même force.

Prenons, pour exemples, les mêmes données qu'au n° 156.

1° $v_0 = 0$, $v = 420$, $m = \frac{1}{40g}$, $\frac{1}{2}mv^2 = 224,8$.

Donc, si l'on admet que depuis l'instant du départ jusqu'à celui où la vitesse de 420 mètres a été acquise, la force ait été constante, en appelant x l'espace parcouru depuis cet instant, on a

$$Fx = 224^{kg.m.},8;$$

donc, suivant que la force a agi

dans une étendue x de........	1^m;	2^m;	3^m;	etc.
son intensité F en kilog. a été...	224,8;	112,4;	74,9;	etc.

2° $v_0 = 420$, $v = 0$, $\frac{1}{2}mv_0^2 = 224,8$;

$$Fx = -224,8:$$

travail négatif, parce que la force est de sens contraire à la vitesse initiale, et, par conséquent, au chemin x. Si l'on suppose, par exemple, que l'obstacle n'ait permis au mobile que

de parcourir une longueur de $0^m,02$, on en conclura que la force résistante a été de 11240 kilog.

164. La quantité $\frac{1}{2}mv^2$, *moitié du produit de la masse d'un point matériel multipliée par le quarré de sa vitesse* à un instant déterminé, entre dans les principaux théorèmes relatifs au calcul de l'effet des machines : elle s'appelle dans ce traité (92) *la puissance vive* des points dont il s'agit à l'instant considéré.

165. Avant de chercher à justifier cette dénomination, il faut étendre la relation [28] ci-dessus obtenue au cas où la force totale F n'est pas constante.

En conservant les notations du n° 158, et de plus en désignant par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots\ldots \sigma_n$ les chemins parcourus pendant les temps $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots\ldots \theta_n$, qu'on peut toujours prendre assez petits pour que dans chacun de ces temps la vitesse ne change pas de signe, on aura, d'après le n° 161,

Pour la 1re période. . . . . $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_1\sigma_1.$

Pour la 2e période . . . . $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{2}{1}mv_1^2 = F_2\sigma_2;$

Pour la 3e période . . . . $\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = F_3\sigma_3;$

. . . .

Pour la $n^{\text{ième}}$ et dernière. . . . . $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_{n-1}^2 = F_n\sigma_n;$

d'où, en ajoutant, on tire

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + \ldots\ldots + F_n\sigma_n;$$

ce qui s'écrit, pour abréger, de cette manière

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum F\sigma;$$

ou bien, suivant la notation du n° 73,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathfrak{C}F;$$

c'est-à-dire que, dans ce cas comme au n° 163, *la variation de la puissance vive est égale au travail de la force totale supposée variable d'une manière discontinue.*

166. Cette égalité subsiste, quelque petits que soient les chemins σ. Donc, si la force varie d'une manière continue, en prenant la droite parcourue pour axe des x qui seront les distances variables du mobile à une origine quelconque, et en donnant à la force F le signe qui convient au sens suivant lequel elle agit, on aura

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int F dx, \qquad [29]$$

ou encore

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathfrak{G}F.$$

Ce résultat se déduit immédiatement, mais d'une manière moins élémentaire, de l'équation du n° 154, $mdv = Fdt$, en la multipliant membre à membre par $v = \frac{dx}{dt}$, pour éliminer dt, ce qui donne $mvdv = Fdx$, et en intégrant.

167. Si le mobile était soumis à deux forces simultanées, soit de même sens, soit de sens contraires, la force F, qui entre dans les calculs précédents, serait la somme algébrique de ces forces, et le travail de F, pour chaque élément de chemin, serait égal à la somme algébrique des travaux des forces partielles. On peut donc écrire

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum \mathfrak{G}F, \qquad [30]$$

en désignant alors par F les forces partielles.

168. D'après la définition générale du travail d'une force (74), les divers cas qui viennent d'être considérés sont renfermés dans un énoncé commun que nous appellerons théorème de la relation entre le travail et la puissance vive, ou plus simplement THÉORÈME DE L'EFFET DU TRAVAIL dans le mouvement rectiligne d'un point matériel :

La variation de la puissance vive est numériquement et algébriquement égale au travail des forces dans le même temps.

169. En considérant les deux cas particuliers où l'une des vitesses v_0, v est nulle, on voit que la puissance vive possé-

dée par un point matériel est, 1° égale au travail total qu'il a reçu depuis qu'il est sorti du repos; 2° numériquement égale au travail négatif nécessaire pour réduire ce point au repos.

C'est cette dernière propriété qui nous engage à donner à la quantité $\frac{1}{2}mv^2$ la dénomination de *puissance vive,* équivalente de celle de *capacité*, *que possède un point matériel en mouvement, de subir, jusqu'à ce qu'il soit réduit au repos, un certain travail résistant*, *en vertu de sa masse et de sa vitesse.*

170. Dans la plupart des traités de Mécanique, la quantité mv^2 s'appelle *force vive*, expression née de l'application du mot force à la capacité de travail des moteurs. Coriolis, remarquant que la quantité $\frac{1}{2}mv^2$ entre dans les énoncés des théorèmes les plus importants de la Mécanique industrielle, et « qu'il est très-gênant d'avoir un nom pour le double d'une « quantité qu'on retrouve à chaque instant, » a proposé, dans son traité du *calcul de l'effet des machines*, d'affecter la dénomination de *force vive* d'un point matériel au produit $p\frac{v^2}{2g}$ de son poids p par la hauteur $\frac{v^2}{2g}$ due à sa vitesse v, ce qui revient (145 et 150) à $\frac{1}{2}mv^2$. Cette innovation ne paraît pas avoir été accueillie parmi les savants, qui ont vu un grave inconvénient à changer le sens d'une expression consacrée dans un grand nombre d'ouvrages justement estimés. D'ailleurs, Coriolis convient lui-même que cette dénomination est impropre, et ne peut être expliquée qu'en attribuant au mot *force* le sens de *disponibilité de travail*, comme le font les praticiens lorsqu'ils parlent de la force d'un cheval, d'une machine à vapeur, d'une chute d'eau.

Convaincu qu'il importe, dans les commencements de l'étude de la Mécanique, de n'attacher au mot force que la notion d'un effort, d'une pression ou d'une traction, exprimable en kilogrammes, d'où il suit que dans un corps en mouvement et abandonné à lui-même (en faisant abstraction de la pesanteur),

il n'y a rien qu'on puisse proprement appeler sa force (*), nous emploierons, dans ce Traité, pour désigner la quantité $\frac{1}{2}mv^2$ ou $p\frac{v^2}{2g}$, l'expression de *puissance vive*, à laquelle les lecteurs pourront, plus tard, s'ils le veulent, substituer celle de

---

(*) On a beaucoup disputé, dans le dix-huitième siècle, sur *la mesure des forces des corps en mouvement.* Dans le cas très-simple d'un corps solide possédant un mouvement commun de translation, on réduisait la question à savoir « si la force d'un corps qui a une « certaine vitesse devient double ou quadruple, quand sa vitesse « devient double. » (D'Alembert, *Discours préliminaire de son Traité de Dynamique*, p. xvii.) Il est évident qu'on donnait alors au mot *force* un sens différent de celui que nous adoptons (61); et, en effet, en admettant l'existence de forces instantanées (70), et en parlant d'un corps en mouvement, abandonné à lui-même, on disait que *sa force restait la même*, que *cette force se conservait sans cesse* (Laplace, *Exposition du système du monde*, liv. 3, chap. 2), comme si elle était à chaque instant la cause actuelle du mouvement. Suivant les idées modernes, la force est, non la cause subsistante de tout mouvement existant, mais la cause qui modifie tout mouvement variable. Un corps abandonné à lui-même n'exerce ni ne reçoit actuellement aucune force, et si l'on se demande quelle est la force qui a produit son mouvement, ou quelle est celle qui l'anéantirait, cette question est indéterminée; mais la quantité de mouvement mv du corps considéré fait connaître l'impulsion $\int Fdt$ de la force demandée, impulsion qui est double, quand la vitesse devient double; tandis que la puissance vive $\frac{1}{2}mv^2$ fait connaître le travail $\int Fds$ de cette force, lequel devient quadruple quand la vitesse est double. Ainsi les philosophes qui, comme Newton et Euler, mesuraient ce qu'ils appelaient la force d'un corps en mouvement par le produit de sa masse par sa vitesse, appelaient force la quantité complexe que nous appelons impulsion, et ceux qui, comme Leibnitz et Bernoulli, prenaient pour mesure le produit de la masse par le carré de la vitesse donnaient le nom de force à la quantité complexe que nous appelons travail.

demi-force vive, pour se conformer au langage le plus généralement reçu.

Pour nous, les mots *puissance vive* entraînent l'idée du travail que doit subir un point matériel pour être réduit au repos, et l'épithète *vive* sert, comme le dit Coriolis, « à distinguer le « travail qu'on peut retirer d'une *vitesse* acquise, de celui « qu'on peut retirer de ressorts comprimés ou de tout autre « moteur. »

§ 8. *De l'emploi des formules précédentes dans les questions relatives au mouvement rectiligne.*

171. *Lorsque la force est constante*, ou, ce qui revient au même, lorsque le mouvement est uniformément varié, les équations propres aux diverses questions qui peuvent se présenter sont (153 et 163) :

$$v = v_0 + \frac{F}{m} t,$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2,$$

$$\frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = F(x - x_0),$$

dont la troisième, qui est l'équation de l'effet du travail de la force constante F, se conclut des deux précédentes, par l'élimination du temps t. Chacune de ces trois équations ne renferme que deux des trois variables x, v, t, et fournit par conséquent l'une d'elles en fonction d'une des deux autres.

Supposons maintenant la force variable, et considérons les trois cas les plus simples qui puissent se présenter, ceux où la force est une fonction donnée de l'une des trois variables t, x, v.

172. *Si la force est une fonction donnée du temps*, soit $F = \mathfrak{F}|t|$, l'équation fondamentale (154) $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ donne en intégrant

$$v - v_0 = \frac{1}{m} \int_{t=0}^{t} \mathfrak{F}|t|\, dt,$$

Supposons que cette intégrale puisse être obtenue sous une forme générale, et posons

$$v - v_0 = \frac{1}{m} \mathfrak{F}_1 | t |.$$

En mettant pour v sa valeur $\frac{dx}{dt}$, on en conclura par l'intégration

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m} \int_{t=0}^{t} \mathfrak{F}_1 | t | dt.$$

Si cette seconde intégrale peut être obtenue sous forme générale, on aura donc deux équations entre les trois variables v, x, t.

Lorsque les intégrales de $\mathfrak{F} | t | dt$ et de $\mathfrak{F}_1 | t | dt$ ne peuvent pas être trouvées sous forme générale, on les obtient approximativement pour des valeurs successives de t par la formule de Th. Simpson (*Géom. anal.*, 302).

Réciproquement, si l'une des variables x ou v était donnée *à priori* en fonction du temps, on en conclurait l'expression de la force variable F inconnue par les formules

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad F = m \frac{dv}{dt}.$$

173. *Lorsque la force est une fonction donnée de la distance* x *du mobile à un point fixe*, si l'on pose $F = \mathfrak{F} | x |$, l'équation de l'effet du travail, déduite de la formule fondamentale $\frac{dv}{dt} = \frac{\mathfrak{F} | x |}{m}$, en éliminant dt au moyen de la relation $vdt = dx$, et en intégrant, est

$$\frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^{x} \mathfrak{F} | x | dx = \mathfrak{F}_1 | x |,$$

en supposant l'intégration possible sous forme générale.

On en tire

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \mathfrak{F}_1 | x |};$$

puis, par la substitution de cette valeur dans l'équation $dt = \frac{dx}{v}$, la détermination de t en fonction de x sera réduite à une quadrature.

Réciproquement, si la vitesse était donnée *à priori* en fonction de la distance x, on en conclurait l'expression de la force variable. Soit $v = \mathcal{F}|x|$; en éliminant le temps entre les équations

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \quad \text{et} \quad v = \frac{dx}{dt}, \quad \text{on a} \quad v\frac{dv}{dx} = \frac{F}{m},$$

ou

$$F = m\mathcal{F}|x|\mathcal{F}'|x|.$$

Si c'était le temps t qui fût donné en fonction de x, on en conclurait l'expression de la vitesse, et par suite celle de la force. Soit $t = \varphi|x|$, d'où $dt = \varphi'|x|dx$; on en tire $v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varphi'|x|}$; et v étant ainsi exprimé en fonction de x, on rentre dans le cas précédent.

174. *Si la force est une fonction donnée de la vitesse*; soit $F = \mathcal{F}|v|$, l'équation fondamentale $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ donne $dt = \frac{mdv}{\mathcal{F}|v|}$, et en intégrant

$$t = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\mathcal{F}|v|},$$

ce qui déterminera, soit t en fonction de v, soit les valeurs de t correspondantes à diverses valeurs de v.

Pour avoir de même x en fonction de v, on éliminera le temps entre les deux équations

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{F}|v|}{m} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{mvdv}{\mathcal{F}|v|},$$

et en intégrant

$$x - x_0 = m\int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{\mathcal{F}|v|}.$$

On pourra donc assigner autant de valeurs simultanées qu'on voudra aux trois variables v, t, x.

Réciproquement, si la distance x était donnée *à priori* en fonction de la vitesse v, on en conclurait l'expression de la force variable. Soit $x = \mathcal{F}|v|$, d'où $dx = \mathcal{F}'|v|dv$. En éliminant dx entre cette équation et $dx = vdt$, on a $\frac{dv}{dt} = \frac{v}{\mathcal{F}'|v|}$, et par conséquent $F = \frac{mv}{\mathcal{F}'|v|}$.

Quant à l'expression du temps en fonction de v, on l'obtient par l'intégration de l'avant-dernière équation

$$t=\int_{v_0}^{v}\frac{\mathfrak{F}'\,|\,v\,|\,dv}{v}.$$

Si c'était le temps t qui fût donné en fonction de v, on trouverait aussi facilement la force. Soit $t=\varphi\,|\,v\,|$, d'où $dt=\varphi'\,|\,v\,|\,dv$; on en conclut $\mathrm{F}=\frac{m}{\varphi'\,|\,v\,|}$; et quant à la distance x, on l'obtient en éliminant dt entre l'avant-dernière équation et $dt=\frac{dx}{v}$, ce qui donne

$$dx=v\varphi'\,|\,v\,|\,dv,\quad \text{d'où}\quad x-x_0=\int_{v_0}^{v}v\varphi'\,|\,v\,|\,dv.$$

175. Dans certaines questions, la force est donnée en fonction de plusieurs variables x, v, t. Soit, par exemple, $\mathrm{F}=\mathfrak{F}\,|\,x,v\,|$. L'équation fondamentale du mouvement sera alors

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{m}\,\mathfrak{F}\,|\,x,v\,|,$$

ou, en mettant pour v sa valeur $\frac{dx}{dt}$,

$$d.\frac{dx}{dt}=\frac{1}{m}\,\mathfrak{F}\left\{x,\frac{dx}{dt}\right\}dt;$$

c'est une équation différentielle du second ordre qui pourra, dans certains cas, être intégrée, c'est-à-dire fournir une relation entre x et t, par les méthodes enseignées dans les traités spéciaux de calcul intégral. Il est rare que de telles questions se présentent dans la mécanique industrielle.

§ 9. *Applications.*

1° Mouvement vibratoire d'une tige verticale élastique soutenant un corps pesant (*).

176. 1re QUESTION. Une tige prismatique verticale est fixée

(*) Le fond des numéros 176 à 182 est tiré de l'*Introduction à la Mécanique industrielle*, par M. PONCELET, deuxième édition, pages 385 à 400.

à son extrémité supérieure; on attache à l'autre extrémité un corps M dont le poids est Q. Ce corps, d'abord soutenu de manière qu'il n'exerce aucune action sur la tige, est subitement abandonné à la pesanteur : dès lors la tige s'allonge d'une quantité variable x, et en même temps exerce sur le corps une force variable. On admet que cette force, qu'on peut appeler la *tension* de la tige, est proportionnelle

1° au rapport de l'allongement x à la longueur L primitive ou naturelle de la tige;

2° à la section A de la tige, section rapportée au mètre quarré. Ainsi l'on a :

$$F = \frac{EAx}{L}, \qquad [31]$$

E, qu'on appelle *coefficient* ou *module de l'élasticité*, étant un nombre de kilogrammes dépendant de la matière de la tige. S'il s'agit du fer forgé, on a à peu près $E = 2 \times 10^{10}$; d'où l'on conclura, par exemple, qu'un fil de fer de *un millimètre quarré* de section et de *un mètre* de longueur primitive est allongé de *un demi-millimètre* quand sa tension est de 10 kilogrammes, c'est-à-dire, quand il exerce sur chacun de ses points d'attache extrêmes une force de 10 kilogrammes.

Le coefficient $\frac{EA}{L}$ de x dans l'équation [31] est la mesure de la *roideur de ressort* de la tige dans le sens longitudinal.

La loi exprimée par cette équation [31] n'est admissible que jusqu'à un certain état d'extension qu'on appelle la *limite de l'élasticité*, et qui, pour le fer, correspond à une tension de 12 à 18 kilogrammes par millimètre quarré de section, suivant la qualité du fer. Cette loi suppose enfin que la tige est uniformément allongée dans toute son étendue, ce qui n'a lieu à la rigueur pendant le mouvement que dans le cas où l'allongement s'opère lentement. L'expression ci-dessus de F peut encore être considérée comme suffisamment exacte, même pendant le mouvement rapide, lorsque la masse de la tige est petite par rapport à celle du corps M.

Ces hypothèses étant admises, on demande quel sera le mouvement du corps M considéré comme un point matériel.

177. A l'instant où le corps M, dont la masse est $\frac{Q}{g}$, a parcouru la longueur x, il a reçu, depuis le commencement du mouvement, le travail $\int_0^x (Q - F)\, dx$ ou $\int_0^x \left(Q dx - \frac{EA}{L} x dx\right)$, et sa puissance vive est $\frac{1}{2}\frac{Q}{g} v^2$, sa vitesse étant v. Donc on a (165 et 167) en intégrant (*Géom. anal.*, 286),

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g} v^2 = Qx - \frac{1}{2}\frac{EA}{L} x^2. \qquad [32]$$

Soit l l'allongement correspondant à l'instant où la tension F est égale à Q (c'est celui qu'aurait pris et conservé la tige si l'on avait supprimé très-lentement le support inférieur du corps). M. Poncelet appelle *allongement de stabilité* la quantité $\frac{l}{L}$ qui est l'allongement, par mètre de longueur primitive, de la tige portant le poids Q en repos. On aura en faisant dans [31], $F = Q$ et $x = l$,

$$Q = \frac{EA}{L} l,$$

d'où

$$\frac{EA}{L} = \frac{Q}{l},$$

et l'équation [32] devient

$$v^2 = \frac{g}{l}(2l - x)x. \qquad [33]$$

La vitesse v est donc proportionnelle à l'ordonnée y d'un cercle dont $2l$ serait le diamètre et x l'un de ses segments.

Le maximum de v a lieu pour $x = l$; ce qui doit être, puisque la force F opposée à Q lui est égale dans cette position, et ensuite devenant plus grande oblige le mouvement de se ralentir. Ce maximum de vitesse est $V = \sqrt{gl}$, vitesse due à la moitié de l (145).

Le corps M cesse de descendre et la tige de s'allonger quand v redevient nulle, ce qui a lieu pour $x = 2l$; alors F devient $2Q$, de sorte que dans cette position extrême l'allongement et la tension sont doubles de ce qu'ils seraient si la tige supportait le corps M en repos.

178. A partir de l'instant où la tige a pris l'allongement $2l$, le corps M remonte; la formule [33] reste applicable, parce que, pour chaque espace négatif dx, le travail est encore exprimé par $(Q-F)dx$. Ainsi le corps M repasse en remontant par les mêmes points avec les mêmes vitesses en sens contraire, puis il redescend, et ainsi de suite. On demande la durée de ses oscillations, et il est facile de résoudre ce problème sans faire usage des règles du calcul intégral.

En faisant dans [33] $v=\frac{dx}{dt}$ et $\sqrt{(2l-x)x}=y$,

on a
$$dt=\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{dx}{y}. \qquad [34]$$

Soient (*fig.* 16), $AO=l$, $AM=x$, $MN=y$, $MM'=dx$, $NN'=ds$.

Les triangles rectangles semblables MON, PNN' donnent

$$\frac{NP}{MN}=\frac{NN'}{ON} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{y}=\frac{ds}{l},$$

et l'équation [34] devient

$$dt=\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\frac{ds}{l}, \quad \text{d'où} \quad t=\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{s}{l},$$

en faisant $AN=s$, et en appelant t le temps pendant lequel l'extrémité de la tige passe de A en M. Ainsi le temps t et l'arc AN croissent proportionnellement, de sorte qu'un point mobile qui parcourrait la circonférence ANB de manière que sa projection sur la verticale AB coïncidât toujours avec la position du corps M, aurait sur cette circonférence un mouvement uniforme.

Pour avoir le temps de la descente de A en B, il faut faire $s=\pi l$, la demi-circonférence ANB, ce qui donne $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Telle est la durée d'une simple oscillation de A en B ou de B en A. Ainsi, en la désignant par T, nous aurons la formule

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (*) \qquad [35]$$

179. EXEMPLE. $E = 2 \times 10^{10}$, $L = 10^m$, $\frac{Q}{A} = 4 \times 10^6$. Le poids par millimètre quarré est donc de 4^{Kg}.

On trouve $\qquad l = \frac{QL}{EA} = 0^m{,}002.$

Maximum de vitesse, $V = \sqrt{gl} = 0^m{,}140$.

Durée d'une oscillation double (aller et retour),

$$2T = 6{,}283 \sqrt{0{,}000204} = 0'',09.$$

Nombre d'oscillations doubles par seconde, $\frac{1}{2T} = 11{,}1$.

180. DEUXIÈME QUESTION. On suppose que le corps M, à l'instant où la tige commence à s'allonger, possède une vitesse initiale v_0; les données restent d'ailleurs les mêmes que dans la question précédente.

En conservant aux lettres les mêmes significations que dans l'aualyse précédente, le théorème de l'effet du travail (n° 168) donne:

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g}(v^2 - v_0^2) = \int_0^x (Q - F)\,dx = Qx - \frac{EA}{L}\frac{x^2}{2}$$

ou, en remplaçant $\frac{EA}{L}$ par $\frac{Q}{l}$ comme au n° 177,

$$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{l}(2lx - x^2). \qquad [35\ bis.]$$

On en conclura, comme dans la première question, que le maximum de v répond à $x = l$, et à $F = Q$. Ce maximum,

---

(*) On obtiendra les mêmes résultats par le calcul intégral, en substituant dans [33] $\frac{dx}{dt}$ pour v, ce qui donne

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{l^2 - (l - x)^2}},$$

et en intégrant à partir de $x = 0$ (*Géom. anal.*, 282 et 251)

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \text{ang.}\left(\cos = \frac{l - x}{l}\right).$$

que nous désignerons par V, est donné par la formule

$$V^2 = v_0{}^2 + gl.$$

Le maximum X de l'allongement x répond à $v = 0$. On a donc, en faisant $v = 0$ dans [35 *bis*],

$$X^2 - 2lX = \frac{lv_0{}^2}{g}, \quad \text{d'où} \quad X = l\left(1 + \sqrt{1 + \frac{v_0{}^2}{gl}}\right),$$

et la tension correspondante de la tige est, d'après [31],

$$\frac{EAX}{L} \quad \text{ou} \quad \frac{QX}{l} \quad \text{ou} \quad Q\left(1 + \sqrt{1 + \frac{v_0{}^2}{gl}}\right).$$

181. Exemple. Posons les mêmes données qu'au n° 179. Faisons de plus $v_0 = 0^m,20$ due (144) à la hauteur

$$h = \frac{v_0{}^2}{2g} = 0^m,00204.$$

La longueur l reste, comme au n° 172, de $0^m,002$.

Maximum de vitesse, $V = \sqrt{0,04 + 0,01962} = 0^m,244$.

Maximum d'allongement,

$$X = l(1 + \sqrt{1 + 2,04}) = 0^m,00548.$$

Maximum de tension,

$$\frac{QX}{l} = 2,74 \times 4 \times 10^6.A = 10,96 \times 10^6.A;$$

ce qui revient, par millimètre quarré, à $10^{k},96$; de sorte qu'il s'en faudrait peu, pour certains fers, que l'élasticité n'en fût altérée.

182. A partir de l'instant du maximum d'allongement, le corps M remonte; l'équation [35 *bis*] continue d'être applicable, parce que pour chaque espace négatif dx, le travail des forces reste exprimé par $(Q - F)\,dx$. Ainsi le corps M reprend pour les mêmes valeurs de x les mêmes vitesses, mais en sens contraire. Il possède donc la vitesse ascendante v_0 à l'instant où la tige est revenue à son état naturel. Dans cette position, si le corps peut glisser le long de la tige sans frottement, il s'élèvera à la hauteur $\frac{v_0{}^2}{2g}$ due à v_0, puis il retombera. Si au con-

traire il est fixé à l'extrémité de la tige, et que celle-ci ne puisse pas plier, elle se contractera en exerçant sur le corps M une pression de haut en bas, dont l'intensité sera encore donnée par la formule $F=\frac{EAx'}{L}$, dans laquelle x' est la diminution de longueur de la tige. L'action de celle-ci est donc alors, dans toutes les positions possibles, donnée pour l'intensité et le sens par la formule [31], en changeant le signe de x quand le corps M est au-dessus de la position initiale. Dans ce cas la formule [35 *bis*] s'applique à toutes les valeurs de x positives ou négatives ; elle donne, en y faisant $v=0$, les valeurs extrêmes de x, l'une positive, l'autre négative $l\pm\sqrt{l^2+\frac{lv_0^2}{g}}$, d'où il suit que l'amplitude des oscillations est $2\sqrt{l^2+\frac{lv_0^2}{g}}$.

L'équation [35 *bis*] peut être mise sous une forme plus simple. Pour cela soit A (*fig.* 17) l'origine des x; $AO=l$, $OB=OB'=\sqrt{l^2+\frac{lv_0^2}{g}}=r$, de sorte que B et B' sont les extrémités de la course du point mobile. AM étant $=x$, représentons par z la variable OM, et transformons l'équation [35] en y remplaçant x par sa valeur en z. On trouvera :

$$x=l-z,\qquad 2l-x=l+z,$$

$$\text{d'où}\qquad v^2-v_0^2=\frac{g}{l}(l^2-z^2),$$

ou, en mettant pour l^2 sa valeur $r^2-\frac{lv_0^2}{g}$ tirée de la définition ci-dessus de r,

$$v^2=\frac{g}{l}(r^2-z^2).$$

La vitesse v est donc encore représentée par l'ordonnée MN ou y d'un cercle qui, dans ce cas, doit être construit sur BB' ou $2r$, multipliée par le coefficient $\sqrt{\frac{g}{l}}$; d'où l'on conclura, comme au n° 178, que le temps employé par le corps M à parcourir une longueur quelconque MM', est numériquement

égal à $\frac{\text{arc NN'}}{r}\sqrt{\frac{l}{g}}$, et que la durée d'une oscillation simple, aller ou retour, est encore $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, et par conséquent indépendante de la vitesse initiale v_0.

183. Remarque. La force Q, qui sollicite le corps M, pourrait être différente du poids de ce corps, poids que nous désignerons par P. (On peut imaginer, par exemple, que la force constante Q soit produite par un gaz exerçant une pression constante sur l'une des faces d'un piston, dont le poids serait P, attaché à l'extrémité mobile de sa tige.) Dans ce cas, en négligeant toujours la masse de la tige, l'équation de l'effet du travail est la même que précédemment, excepté que dans le premier membre la masse est $\frac{P}{g}$ au lieu de $\frac{Q}{g}$. On a donc

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}(v^2 - v_0^2) = Qx - \frac{EA}{L}\frac{x^2}{2},$$

ou, en remplaçant $\frac{EA}{L}$ par $\frac{Q}{l}$, expression où l est encore l'allongement que la tige prendrait dans l'état de repos sous l'effort Q,

$$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{l}\cdot\frac{Q}{P}(2lx - x^2).$$

Les conséquences tirées de cette équation seraient les mêmes que précédemment, si ce n'est que g serait remplacé par $g.\frac{Q}{P}$.

184. 3° Question. *Une tige supportait en repos une pression* Q, *qui la raccourcissait de la quantité* $l = \frac{QL}{EA}$. *Tout à coup cette pression est remplacée par une traction* Q, *de même intensité que la pression précédente. On demande encore la loi du mouvement du corps* M, *dont le poids est* P, *attaché au bout de la tige dont on néglige la masse.*

Comptons toujours les x dans le sens de l'allongement, et à partir du point qu'occupe l'extrémité mobile de la tige

lorsque la tension F est nulle. L'équation de l'effet du travail devient

$$\frac{Pv^2}{2g} = \int_{x=-l}^{x} \left(Qdx - \frac{EA}{L} xdx \right),$$

l'intégrale devant être prise à partir de $x = -l$, parce que dans cette position la vitesse v est nulle. Cette intégrale définie étant calculée (*Géom. anal.*, 270), et $\frac{EA}{L}$ étant remplacé par $\frac{Q}{l}$, on trouve

$$v^2 = \frac{g}{l} \cdot \frac{Q}{P} (2lx - x^2 + 3l^2).$$

Les deux extrémités de la course du point M sont données par les valeurs de x, pour lesquelles la vitesse v est nulle, savoir, $x' = -l$, et $x'' = 3l$.

Le plus grand allongement de la tige serait donc triple de l'allongement dû à la charge Q dans l'état de stabilité (*).

185. Les problèmes qui viennent d'être résolus sont compris comme cas particuliers dans la question suivante :

Un point matériel dont la masse est m *se meut sur la droite* AB (fig. 18), *en vertu d'une vitesse initiale qu'il possédait à son passage au point* M_0, *outre qu'il est sollicité par une*

(*) Ce résultat est conforme à celui que donne M. CH. COMBES, dans son *Traité de l'Exploitation des Mines*, t. I, page 504. Il ajoute les réflexions suivantes :

« Sans doute, dans les machines bien construites, les forces appli-
« quées à l'extrémité d'une tige ne changent pas brusquement de
« direction en conservant leur intensité, ainsi que nous l'avons
« supposé. Mais, bien que les changements de direction des forces
« soient graduels, au lieu d'être subits, il n'en résulte pas moins
« dans l'étendue des tiges, qui sont alternativement étendues et com-
« primées, des mouvements vibratoires qui les fatiguent beaucoup
« plus que ne le ferait une charge permanente. L'expérience dé-
« montre ce fait, et les constructeurs ne manquent pas d'y avoir
« égard pour fixer les dimensions de ces tiges, qui, d'après les aper-
« çus précédents, doivent avoir une section transversale triple de
« celle qui suffirait, si elles étaient chargées d'une manière perma-
« nente du plus grand effort qu'elles aient à supporter. »

force F *qui l'attire vers le point* O *de la droite* AB, *et qui varie proportionnellement à la distance du mobile à ce point* O. *On demande quelle est la loi du mouvement de ce corps.*

Soit M, à un instant quelconque, la position du point matériel. Soit x la distance OM. A l'instant considéré, l'intensité absolue de la force F est fx, en représentant par f l'intensité qui correspondrait à l'unité de distance. Pendant le parcours de l'espace MM' ou dx, le travail de la force F est $-fxdx$, quelle que soit la position du mobile, sur la partie positive OB de l'axe x, ou sur la partie négative OA, et quel que soit le sens du mouvement de A vers B, ou de B vers A. On vérifiera aisément, pour les quatre hypothèses possibles, l'exactitude de cette expression du travail élémentaire de la force F, en remarquant que lorsque le mobile est situé à gauche de l'origine O la distance x est négative, et que lorsqu'il se meut de B vers A, la différentielle dx est négative.

Cela posé, en appliquant le théorème de l'effet du travail (167), on a

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -\int_{x_0}^{x} fxdx = \frac{1}{2} f(x_0^2 - x^2),$$

d'où
$$v^2 = \frac{f}{m}\left(\frac{mv_0^2}{f} + x_0^2 - x^2\right),$$

ou plus simplement $v^2 = \frac{f}{m}(X^2 - x^2)$,

en représentant par X^2 la constante $\frac{mv_0^2}{f} + x_0^2$. On voit que la vitesse v varie proportionnellement à l'ordonnée ML qui correspond à l'abscisse x dans un cercle ayant OB égal à X pour rayon. Ainsi, en supposant la vitesse v_0 positive, le mobile va de M_0 en B, puis de B en A, de A en B, et ainsi de suite. L'amplitude de l'oscillation AB est $2X$,

ou
$$2\sqrt{\frac{mv_0^2}{f} + x_0^2}.$$

Pour avoir la durée d'une oscillation, ou même du parcours d'une portion quelconque de l'espace AB, il suffit de

mettre pour v sa valeur $\frac{dx}{dt}$ dans la dernière équation, d'en conclure

$$dt = \sqrt{\frac{m}{f}} \frac{dx}{\sqrt{X^2 - x^2}},$$

et en intégrant entre deux valeurs x' et x'' de x,

$$t = \sqrt{\frac{m}{f}} \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{X^2 - x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{f}} \left[\text{arc}\left(\sin = \frac{x''}{X}\right) - \text{arc}\left(\sin = \frac{x'}{X}\right)\right].$$

Ainsi le parcours de la distance MN est $\sqrt{\frac{m}{f}} \cdot \frac{\text{arc LP}}{\text{OB}}$, et la durée T d'une oscillation simple ou du parcours de AB est $\sqrt{\frac{m}{f}} \cdot \frac{\pi \text{OB}}{\text{OB}}$.

En définitive,

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{f}},$$

quantité indépendante de la vitesse v_0, qui n'a d'influence que sur l'amplitude AB.

2° Mouvement varié rectiligne et horizontal d'un corps flottant à la surface d'un liquide.

186. Nous supposons qu'un corps de la forme d'un navire, flottant à la surface d'une eau tranquille, reçoive dans le sens de sa longueur un mouvement de translation horizontal, et soit ensuite abandonné à lui-même. On verra plus tard que chaque point du corps flottant se meut comme un point matériel dont la masse m serait égale à celle de tout le corps, et qui serait soumis à une force horizontale R, opposée au sens du mouvement. Cette force s'appelle la *résistance du liquide*, et il résulte de l'expérience que lorsque les dimensions du navire sont petites par rapport à celles du li-

quide où il se meut, la résistance peut être représentée avec une approximation suffisante par la formule

$$R = c\Pi A \frac{v^2}{2g},$$

dans laquelle c est un coefficient qui dépend de la figure plus ou moins effilée de la carène, et, suivant les observations de Bossut, serait de 0,16; Π, le poids d'un mètre cube du liquide; A, la surface immergée du *maître couple* (ou plus grande section transversale de la carène); v la vitesse, et par conséquent $\frac{v^2}{2g}$ la hauteur due à cette vitesse.

Ceci admis comme hypothèse, on demande quelle est la loi du mouvement, à partir de l'instant où le navire dont la masse est m, possédant une vitesse v_0, sera abandonné à l'action de la résistance du liquide.

L'équation de ce mouvement est

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{R}{m} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{c\Pi A}{2mg}v^2.$$

Remarquons que mg étant le poids du navire, est aussi, comme on le démontrera plus tard, le poids du liquide déplacé par le navire dans l'état de repos. Représentons par Al le volume de ce liquide: son poids est donc ΠAl. Mettant dans l'équation précédente cette expression de mg, et tirant la valeur de dt, on a

$$dt = -\frac{2l}{c} \cdot \frac{dv}{v^2},$$

d'où, en intégrant à partir de l'instant où la vitesse est v_0 jusqu'à celui où elle est réduite à une valeur v,

$$t = \frac{2l}{c}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right).$$

De là on tire

$$v = \frac{v_0}{\frac{cv_0}{2l}t + 1}.$$

Mettant pour v sa valeur $\frac{dx}{dt}$, puis multipliant par dt et in-

tégrant, on obtient l'espace parcouru

$$x = 2,3026 \cdot \frac{2l}{c} \log\left(\frac{cv_0}{2l} t + 1\right),$$

ou, en mettant pour $\frac{cv_0}{2l} t + 1$ sa valeur $\frac{v_0}{v}$,

$$x = 2,3026 \cdot \frac{2l}{c} \log \frac{v_0}{v},$$

formule qu'on aurait pu obtenir directement, en mettant pour dt sa valeur $\frac{dx}{v}$, dans la première équation ci-dessus et en intégrant.

Ces formules montrent que si les hypothèses admises étaient rigoureusement exactes, la vitesse v irait sans cesse en décroissant, sans jamais atteindre sa limite *zéro*, et que la distance x augmenterait indéfiniment.

Faisons, par exemple, $l = 20$, et par conséquent

$$\frac{2l}{c} = \frac{40}{0,16} = 250.$$

Supposons, en outre, $v_0 = 2$. Les formules deviennent

$$v = \frac{250}{t + 125} \quad \text{et} \quad x = 575,65\,(0,30103 - \log v).$$

On en conclut le tableau suivant, dans lequel les temps et les espaces parcourus sont comptés à partir de l'instant et de la position où la vitesse était de 2 mètres.

TEMPS EN MINUTES.	TEMPS t EN SECONDES.	VITESSE v EN MÈTRES.	ESPACE x EN MÈTRES.
1'	60"	m. 1,35	98,26
2	120	1,02	168,34
3	180	0,82	222,90
....	....	....	....
10	600	0,345	439,34
20	1200	0,188	591,12
30	1800	0,130	683,35
....	....	....	....
100	6000	0,041	971,85
1000	60000	0,0041	1543,95

La loi de la résistance proportionnelle au quarré de la vitesse n'étant pas rigoureusement exacte, l'expérience ne réaliserait pas tout à fait ces résultats du calcul.

3° Mouvement vertical d'un corps pesant dans un milieu résistant.

187. *Chute verticale.* Supposons qu'un corps sphérique tombe verticalement dans l'air en vertu de la pesanteur, et cherchons la loi de son mouvement, en admettant, ce qui n'est pas tout à fait exact, que la résistance de l'air soit proportionnelle au quarré de la vitesse, et représentée par la formule

$$R = c\Pi A \frac{v^2}{2g},$$

dans laquelle c est un coefficient qui, pour une vitesse médiocre, est environ 0,60; Π, le poids d'un mètre cube d'air; A, la surface d'un grand cercle de la sphère; v, la vitesse.

L'équation générale du mouvement est

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - R}{m}.$$

En appelant Π' le poids par mètre cube de la sphère supposée homogène, et r le rayon de cette sphère, on a

$$m = \frac{4}{3}\frac{Ar\Pi'}{g},$$

et l'équation précédente devient

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3c\Pi}{8r\Pi'}v^2 \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{v^2}{K},$$

en désignant par K une longueur égale à $\frac{8r\Pi'}{3c\Pi}$.

De cette équation on tire

$$dt = \frac{Kdv}{gK - v^2} = \left(\frac{dv}{\sqrt{gK} + v} + \frac{dv}{\sqrt{gK} - v}\right)\frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{g}},$$

et en intégrant depuis $v = v_0$ vitesse initiale

$$t = \frac{2,3026}{2}\sqrt{\frac{K}{g}}\left(\log\frac{\sqrt{gK} + v}{\sqrt{gK} - v} - \log\frac{\sqrt{gK} + v_0}{\sqrt{gK} - v_0}\right).$$

Si l'on supposait que la vitesse initiale v_o fût nulle, cette formule se réduirait à

$$t = \frac{2,3026}{2}\sqrt{\frac{K}{g}}\log\frac{\sqrt{gK}+v}{\sqrt{gK}-v},$$

équation dans laquelle on voit que le temps et la vitesse croissent ensemble; mais jamais la vitesse ne peut atteindre, et, à plus forte raison, dépasser la valeur $\sqrt{gK}$, puisque si l'on fait dans la formule $v = \sqrt{gK}$, t devient infini.

Si dans l'équation $\frac{dv}{dt} = g - \frac{v^2}{K}$ on supposait $v = \sqrt{gK}$, on aurait $\frac{dv}{dt} = 0$, c'est-à-dire que la vitesse $\sqrt{gK}$ étant une fois imprimée, se conserverait uniforme pendant la chute du corps dans l'air.

Revenant à la question générale, pour obtenir l'espace parcouru x en fonction de v, nous éliminons dt entre les deux équations

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{v^2}{K} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{dx}{dt};$$

ce qui donne

$$dx = \frac{1}{2}K\frac{2vdv}{gK - v^2},$$

et en intégrant

$$x = \frac{2,3026}{2}K\left(\log(gK - v_o^2) - \log(gK - v^2)\right).$$

Pour faire usage de ces formules avec quelque exactitude, il faut observer que le coefficient c, qui entre au dénominateur de K, n'est pas tout à fait constant. Nous extrayons de l'*Introduction de la Mécanique industrielle* de M. Poncelet (page 618) la table suivante, résultant d'expériences dues à Robins et Hutton.

$v = 1^m$	3^m	5^m	10^m	25^m	50^m	100^m	200^m	300^m	400^m	500^m
$c = 0,59$	0,61	0,63	0,65	0,67	0,69	0,71	0,77	0,88	0,99	1,04

On attribuera donc, dans les formules précédentes, à la vitesse v des valeurs croissantes, à partir de la valeur initiale v_0, et pour chaque intervalle entre deux vitesses consécutives, on adoptera une valeur de c tirée de la table. On aura ainsi, pour cet intervalle, la constante K, et l'on s'en servira pour calculer par les formules le temps t et l'espace x relatifs à ce même intervalle, pour lequel les vitesses extrêmes seront connues. On continuera ainsi jusqu'à ce que la somme des temps ou des espaces partiels dépasse un temps ou un espace donné. Une interpolation facile fera connaître, avec une approximation suffisante, le temps du parcours d'un espace connu, ou l'espace parcouru dans un temps donné.

188. *Ascension.* Supposons que le corps sphérique soit lancé verticalement avec une vitesse initiale v_0. Si nous comptons de bas en haut la vitesse et les x positives, l'équation fondamentale du mouvement est

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-mg-\mathrm{R}}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = -g - \frac{v^2}{\mathrm{K}},$$

en conservant les notations précédentes. On en tire

$$dt = -\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{g}}\,\frac{\dfrac{dv}{\sqrt{g\mathrm{K}}}}{1+\dfrac{v^2}{g\mathrm{K}}};$$

et, en intégrant (*Géom. anal.*, 297) (*),

$$t = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{g}}\left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{v_0}{\sqrt{g\mathrm{K}}}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{v}{\sqrt{g\mathrm{K}}}\right)\right].$$

(*) On peut retrouver comme il suit, par une construction géométrique, que $\frac{dx}{1+x^2}$ est égale à la différentielle de l'arc dont la tangente est x. Soit (fig. 18 *bis*) $\mathrm{AM} = x$ et $\mathrm{MM}' = dx$. Élevons la perpendiculaire $\mathrm{AO} = 1$; nous aurons $\mathrm{OM} = 1 + x^2$ et, par conséquent

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\mathrm{MM}'}{\overline{\mathrm{OM}}^2}.$$

Prenant O pour centre, décrivons les arcs ABB', MN. Le triangle

Cette formule se simplifie en posant

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{gK}} \quad \text{et} \quad \text{tang}\,\beta = \frac{v}{\sqrt{gK}}; \quad \text{donc}\ t = \sqrt{\frac{k}{g}}(\alpha - \beta);$$

or $$\text{tang}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta} = \frac{\sqrt{gK}(v_0 - v)}{gK - v_0 v},$$

il en résulte

$$t = \frac{1}{g}\sqrt{gK}\ \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{gK}(v_0 - v)}{gK - v_0 v}\right).$$

Si dans cette formule on fait $v = 0$, on obtient pour t la durée de l'ascension, après laquelle le corps retombe; et la formule cesse d'être applicable, parce que la résistance R change de direction.

Pour obtenir l'espace parcouru x pendant l'ascension en fonction de la vitesse v, on élimine dt entre les équations

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{v^2}{K} \quad \text{et} \quad v = \frac{dx}{dt};$$

on a

$$dx = -\frac{1}{2}\,K\frac{2vdv}{gK + v^2},$$

et en intégrant

$$x = \frac{2{,}3026}{2}\,K\Big(\log(gK + v^2_0) - \log(gK + v^2)\Big).$$

En faisant dans cette formule $v = 0$, on trouve pour x la hauteur de l'ascension totale en vertu de la vitesse v_0.

Exemple. Sphère en bois dont le poids par mètre cube est

---

infiniment petit MM'N est semblable à OAM, et les arcs BB', MN sont proportionnels à leurs rayons. On a donc

$$\frac{MM'}{OM} = \frac{MN}{OA} \quad \text{et} \quad \frac{OA}{OM} = \frac{BB'}{MN},$$

d'où en multipliant et à cause de $OA = 1$, on conclut $\frac{MM'}{OM^2} = BB'$.

Or le rayon OA étant 1, l'arc AB est la mesure de l'angle AOB, dont la tang. est x, et BB' est sa différentielle correspondante à l'accroissement dx; donc $\frac{dx}{1 + x^2} = d.\ \text{arc}\ (\text{tang} = x)$.

supposé de 800 kilog., et le rayon $0^m,015$, lancée avec une vitesse de 10 mètres. Le poids du mètre cube d'air à 10° est de $1^{kg},25$. En supposant $c=0,60$, on a, d'après ces données

$$K=\frac{8\times 0,015\times 800}{3\times 0,6\times 1,25}=42,67;$$

$$\frac{2,3026}{2}K=49,12;\quad gK=418,5.$$

La hauteur de l'ascension est donc

$$49,12\,(\log 518,5-\log 418,5)=4,57,$$

tandis que dans le vide elle serait 5,10.

La durée de cette ascension totale s'obtient en faisant $v=0$ dans l'expression précédente du temps t; c'est donc

$$T=\frac{1}{g}\sqrt{gK}\ \text{arc}\left(\text{tang}=\frac{v_0}{\sqrt{gK}}\right).$$

Dans l'exemple ci-dessus énoncé, on a $\log\sqrt{gK}=1,310848$; $\sqrt{gK}=20,457$; $\log\text{tang}=\bar{1},689152$; l'angle correspondant est de 26° 3',03, et doit être ici exprimé par le rapport de son arc au rayon, savoir 0,455. Ainsi,

$$T=\frac{20,457\times 0,455}{9,81}=0,949,$$

tandis que dans le vide l'ascension durerait $\frac{10''}{g}$ ou $1'',0195$. La résistance de l'air a donc plus d'influence sur la hauteur de l'ascension que sur sa durée.

4° Exemple d'un mouvement rectiligne alternatif.

189. Supposons qu'un corps, que nous réduirons par la pensée à un point matériel, ait, sur une ligne que, pour fixer les idées, nous prendrons horizontale, un mouvement rectiligne alternatif analogue à celui du piston d'une machine à vapeur. Soit A_1A_2 (*fig.* 19) l'espace qu'il parcourt alternativement dans les deux sens. A cet effet, perpendiculairement à la direction de cette droite et en un point C de son prolongement, se trouve l'axe d'un arbre tournant sur lequel est

fixée une pièce CB appelée *manivelle*, que l'arbre entraîne dans son mouvement de rotation. A l'extrémité B de la manivelle est une partie arrondie appelée *bouton*, dont l'axe B est parallèle à l'axe C, et sur laquelle s'articule l'un des bouts d'une tige BM appelée *bielle*, dont l'autre bout M est articulé avec une autre tige MA qui, glissant entre des guides, ne peut se mouvoir que suivant la ligne CA_2. C'est à cette seconde tige qu'est attaché en A le corps dont nous considérons le mouvement. Il est clair que l'amplitude de la course A_1A_2 est égale au diamètre B_1B_2 du cercle décrit par le centre B de l'articulation de la manivelle.

190. Le mouvement du corps dont il s'agit étant le même que celui du point M, appelons

x la distance variable CM;

r le rayon CB de la manivelle;

l la longueur BM de la bielle;

α l'angle variable B_1CB du rayon de la manivelle avec l'horizontale CB_1;

et proposons-nous d'abord d'exprimer la loi du mouvement du point M en supposant donné celui de la manivelle.

Le triangle CBM donne entre les deux variables x et α la relation

$$l^2 = r^2 + x^2 + 2rx \cos \alpha, \qquad [36]$$

d'où en considérant x et α comme fonctions du temps t, et en différentiant

$$0 = x\frac{dx}{dt} + r \cos \alpha \cdot \frac{dx}{dt} - rx \sin \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt},$$

ou en remplaçant la vitesse de M, $\frac{dx}{dt}$ par v, et la vitesse angulaire de la manivelle, $\frac{d\alpha}{dt}$, par ω,

$$xv + rv \cos\alpha - rx\omega \sin \alpha = 0. \qquad [37]$$

En différentiant de nouveau cette équation dans laquelle v et ω sont en général fonctions de t comme x et α, on a

$$v\frac{dx}{dt} + x\frac{dv}{dt} + r\cos\alpha\cdot\frac{dv}{dt} - rv\sin\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt}$$

$$- r\omega\sin\alpha\cdot\frac{dx}{dt} - rx\omega\cos\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt} - rx\sin\alpha\cdot\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

ou en remplaçant encore $\frac{dx}{dt}$ par v, et $\frac{d\alpha}{dt}$ par ω,

$$v^2 + x\frac{dv}{dt} + r\cos\alpha\,.\frac{dv}{dt} - 2rv\omega\sin\alpha$$

$$- rx\omega^2\cos\alpha - rx\sin\alpha\frac{d\omega}{dt} = 0. \qquad [38]$$

Le mouvement de la manivelle étant donné, et, par conséquent, sa vitesse angulaire ω et son accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ étant connues pour une valeur quelconque de α ou de t, on peut, au moyen des trois équations [36], [37], [38] qui précèdent, trouver les valeurs de x, de v et de $\frac{dv}{dt}$ correspondantes à toute position de la manivelle.

191. Pour simplifier, considérons le cas où la vitesse angulaire ω est constante, et où la longueur l de la bielle est très-grande par rapport au rayon r. Dans ce cas, la longueur l ou BM de la bielle diffère très-peu de sa projection MP, de sorte qu'on a très-approximativement

$$l = x + r\cos\alpha, \qquad [39]$$

d'où, en différentiant comme tout à l'heure,

$$0 = \frac{dx}{dt} - r\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} \quad \text{ou} \quad v = r\omega\sin\alpha, \qquad [40]$$

puis
$$\frac{dv}{dt} = r\omega\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = r\omega^2\cos\alpha. \qquad [41]$$

192. Maintenant, examinons les forces nécessaires pour produire le mouvement dont nous venons d'étudier la loi. Supposons que le corps attaché en A à l'extrémité de la tige MA reçoive dans le sens de son mouvement une force connue F d'intensité constante et indépendante de l'action de la tige. (Par exemple, on peut imaginer que cette force F soit exercée par de la vapeur agissant alternativement sur l'une des faces d'un piston dans toute l'étendue de sa course, puis sur l'autre face

et toujours dans le sens du mouvement.) Cette force est donc positive pendant le mouvement de A_1 en A_2, et négative pendant le retour de A_2 en A_1. Outre cette force F, le corps dont il s'agit reçoit de la tige MA une force T positive ou négative, pression ou tension, qu'il s'agit de déterminer.

Pendant la course de A_1 en A_2, nous aurons, en désignant par m la masse du mobile,

$$m\frac{dv}{dt} = F + T$$

ou en nous bornant au cas particulier du numéro précédent, et en mettant pour l'accélération $\frac{dv}{dt}$ sa valeur tirée de [41],

$$T = mr\omega^2 \cos\alpha - F.$$

Les valeurs extrêmes de T ont donc lieu aux deux extrémités de la course, et sont

en A_1, où $\cos\alpha = 1 \ldots\ldots\ T_1 = mr\omega^2 - F$,
en A_2, où $\cos\alpha = -1 \ldots\ T_2 = -(mr\omega^2 + F)$.

T_1 peut être pression ou tension, selon que $mr\omega^2$ est supérieur ou inférieur à F; T_2 est toujours une tension dans l'hypothèse que nous avons admise pour la direction de F; la différence $T_1 - T_2$ est toujours $2mr\omega^2$.

193. Les mêmes formules seraient applicables, en changeant le signe de F, au cas où cette force agirait contrairement au mouvement comme un frottement. Ces résultats sont utiles pour déterminer les dimensions à donner à la tige et à la bielle pour qu'elles résistent aux efforts qu'elles subissent.

5° Mouvement rectiligne de deux corps liés par une action mutuelle.

194. Deux corps dont les masses sont m, m', se mouvant dans la direction de la droite qui joint leurs centres de gravité, sont supposés exercer l'un sur l'autre une action mutuelle f, fonction connue de l'accroissement de leur distance, c'est-à-dire, qu'à un instant quelconque le corps m reçoit du corps m' une force f attractive ou répulsive, et le corps m' reçoit au même instant du corps m une autre force f égale, mais

directement opposée à la première, et par conséquent attractive ou répulsive comme elle. On demande la loi du mouvement relatif des deux corps considérés comme deux points matériels, et celle de leurs mouvements absolus.

Nous traiterons d'abord ces questions en général ; nous prendrons ensuite pour exemple deux sphères unies par un fil parfaitement élastique.

Désignons par L la distance à laquelle l'action mutuelle des deux corps a une valeur supposée connue. Si cette distance des deux corps devient $L + x$, leur action mutuelle est une fonction de x : représentons-la par $\mathfrak{F}\{x\}$.

Soient au même instant v et v' les vitesses des deux corps ; $v' - v$ est leur vitesse relative ; désignons-la par u. Ainsi

$$v' - v = u. \qquad [42]$$

Cette vitesse relative dépend simplement de la variation de la distance $L + x$ par rapport au temps :

on a $$u = \frac{dx}{dt}. \qquad [43]$$

En considérant séparément le mouvement de chaque corps, et supposant la force $\mathfrak{F}\{x\}$ attractive, on a les accélérations

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathfrak{F}\{x\}}{m}, \qquad [44]$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{-\mathfrak{F}\{x\}}{m'}. \qquad [45]$$

Les quatre relations [42], [43], [44], [45], entre les cinq variables v, v', u, x, t, constituent la mise en équations du problème proposé.

195. De l'équation [42] on conclut $\frac{dv'}{dt} - \frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}$, et en y substituant les valeurs [44] et [45], on a

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\mathfrak{F}\{x\}.$$

Puis, en éliminant dt de cette équation combinée avec l'équation [43], on obtient

$$udu = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\mathfrak{F}\{x\} \, . \, dx;$$

d'où, en intégrant et en appelant u_0 la vitesse relative à l'instant où x est x_0,

$$\frac{1}{2}(u^2 - u_0^2) = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\int_{x_0}^{x} \mathcal{F}\{x\} \, . \, dx. \qquad [46]$$

Supposons que cette intégrale puisse être obtenue sous une forme générale, on tirerait alors de l'équation [46] u en fonction de x : soit

$$u = \mathcal{F}_1\{x\}. \qquad [47]$$

On en conclurait, à cause de [43],

$$dt = \frac{dx}{\mathcal{F}_1\{x\}}, \quad \text{d'où} \quad t = \int \frac{dx}{\mathcal{F}_1\{x\}}. \qquad [48]$$

Ces équations [47] et [48] renferment la loi demandée du mouvement relatif des deux corps.

196. Pour déterminer le mouvement absolu de chaque corps, il faudrait, dans les équations [44] et [45], substituer la valeur ci-dessus de dt en x et dx : on aurait

$$dv = \frac{\mathcal{F}\{x\}}{m\mathcal{F}_1\{x\}} dx \ldots . \; [49] \quad \text{et} \quad dv' = \frac{-\mathcal{F}\{x\}}{m'\mathcal{F}_1\{x\}} \ldots . \; [50]$$

La détermination de v et v' en fonction de x serait donc réduite à une question de quadrature; et en combinant avec l'équation [48] les résultats obtenus, on pourrait calculer tant de valeurs simultanées qu'on voudrait de v, de v' et de t.

197. Supposons, par exemple, que la force attractive $\mathcal{F}\{x\}$ étant exercée par un ressort consistant en un fil élastique d'une longueur primitive L, dont on néglige la masse, soit proportionnelle à l'accroissement x de cette longueur, et qu'on ait, comme au n° 176, $\mathcal{F}\{x\} = \frac{EA}{L} x$.

L'équation [46] deviendra alors

$$\frac{1}{2}(u^2 - u_0^2) = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\frac{EA}{L}\frac{x^2}{2},$$

d'où

$$u^2 = u_0^2 - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\frac{EA}{L} x^2, \qquad [51]$$

équation qui exprime la loi suivant laquelle la vitesse relative u diminue à mesure que la distance L + x augmente.

Le maximum de l'allongement du fil répondra à $u = 0$, c'est-à-dire, à l'instant où les deux corps auront la même vitesse absolue. Soit X cet allongement ; on aura

$$u_0^2 - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \frac{EA}{L} X^2 = 0\,;$$

et la tension du fil, qui est en général $\frac{EAx}{L}$, deviendra

$$\frac{EA}{L} X = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}} \frac{EA}{L}} \cdot u_0\,.$$

Si cette quantité excède l'effort au delà duquel les allongements cessent d'être proportionnels aux tensions, il y aura danger de rupture, et le fil se rompra certainement, si cette même quantité excède le poids qu'il peut supporter sans se rompre.

La rupture pourra avoir lieu bien avant que la vitesse relative ne soit nulle, ou que la vitesse v de la masse m ne soit devenue égale à la vitesse v' de la masse m'. Pour le reconnaître, il suffit de mettre dans l'expression de la tension $\frac{EA}{L} x$ la valeur de x tirée de l'équation [51]; on a

$$\left(\frac{EAx}{L}\right)^2 = \frac{u_0^2 - u^2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}} \cdot \frac{EA}{L}\,,$$

quantité qui peut être grande, même lorsque u diffère peu de u_0, si la roideur $\frac{EA}{L}$ est considérable.

Cette théorie fait comprendre par analogie comment une balle de fusil fait un trou dans une planche ou dans un carreau de vitre, en n'imprimant qu'une vitesse très-petite à la partie qui reste intacte. Cette vitesse, quoique presque insensible, a été acquise dans un temps si court, qu'elle a exigé, entre la partie enlevée et l'autre, une force égale à celle sous laquelle le bois ou le verre se rompt.

Le calcul du *temps* pendant lequel le fil passe de la longueur L à la longueur $L + x$ se fait en substituant $\frac{dx}{dt}$ à u

dans l'équation [51], et tirant dt, qui se présentant sous la forme $\frac{dx}{\sqrt{u_0^2 - K^2 x^2}}$, est facile à intégrer (*Géom. anal.*, 296, ou *Méthode géométrique* du n° 178).

198. Quelle que soit la relation exprimée par $\mathfrak{F}\{x\}$ entre l'action mutuelle des deux corps et leur distance, pourvu que cette relation soit connue, on pourra résoudre approximativement les questions précédentes.

On construira une courbe qui, ayant les diverses valeurs de x pour abscisses, aura pour ordonnées celles de la force $\mathfrak{F}\{x\}$; le calcul des aires de cette courbe donnera les valeurs successives de $\int_{x_0}^{x} \mathfrak{F}_x\{x\}.dx$, d'où l'on conclura, d'après l'équation [46], les valeurs correspondantes de u.

Dans le cas où l'action $\mathfrak{F}\{x\}$ serait exercée par un fil extensible, on verra si la vitesse relative u peut devenir nulle sans supposer à x une valeur plus grande que l'allongement qui précède la rupture, sinon le fil se rompra.

Ayant les valeurs de u, on calculera celles de $\frac{1}{u}$ ou $\frac{1}{\mathfrak{F}_1\{x\}}$; on construira une courbe ayant pour ordonnées ces valeurs, et en calculant ses aires, on aura, suivant l'équation [48], les valeurs de t correspondantes à celles de x. La même méthode appliquée aux équations [49] et [50] complétera la solution du problème.

199. On trouvera dans l'*Introduction à la Mécanique industrielle* de M. Poncelet, page 345, les données nécessaires pour faire des applications de la théorie précédente.

Voici, par exemple, les allongements subis par le fil de fer sous diverses charges.

CHARGES EXPRIMÉES en kilogrammes par millimètre quarré.	ALLONGEMENTS EXPRIMÉS En millimètres par mètre de longueur.	
	Fer doux ou recuit.	Fer dur, non recuit.
Kg. 5,0	mm 0,29	mm 0,26
10,0	0,59	0,52
15,0	0,88	0,78
20,0	1,18	1,04
25,0	1,47	1,30
30,0	2,50	1,56
32,5	13,00	» »
35,0	14,10	2,22
40,0	18,00	2,40
42,5	20,50	» »
45,0	rupture.	2,82
49,0		3,10
50,0		rupture.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT CURVILIGNE ABSOLU D'UN POINT MATÉRIEL.

§ 1er. *De la résultante de plusieurs forces appliquées simultanément à un même point dans des directions différentes. Composition et décomposition des forces concourantes.*

200. Si plusieurs forces agissent simultanément dans diverses directions sur un même point matériel, la détermination du mouvement qui a lieu s'appuie sur le principe des mouvements relatifs (134), qui a servi (135) à établir la proportionnalité des forces aux accélérations qu'elles impriment à une même masse dans le mouvement rectiligne.

On considérera d'abord un point partant du repos sous l'action de deux forces F', F'', constantes en intensité et en direction, c'est-à-dire qu'elles se transportent parallèlement à elles-mêmes avec le point matériel auquel elles s'appliquent.

Soit A (*fig.* 20) la position initiale du mobile.

Soit $AB = X$ le chemin que la force F', si elle était seule, ferait parcourir au mobile dans le temps t; par conséquent, d'après la 3e équation [25] du n° 153, et y faisant $x_0 = 0$, et $v_0 = 0$,

$$X = \frac{1}{2}\frac{F'}{m}t^2.$$

Soit de même $AC = Y$ le chemin que la force F'', si elle agissait seule, ferait parcourir au même mobile dans le même temps; et, par conséquent,

$$Y = \frac{1}{2}\frac{F''}{m}t^2.$$

Cela posé, si l'on imagine une enveloppe mobile dont tous les points aient le même mouvement accéléré que prendrait le

point matériel considéré en vertu de la seule force F', ce corps prendra (134), par rapport à cette enveloppe, un mouvement relatif dû à la force F'', exactement comme si ni le mouvement de l'enveloppe ni la force F' n'existaient. Donc dans le même temps t que la droite AC, considérée comme une suite de points géométriques liés à l'enveloppe, emploiera à se transporter en BM, droite parallèle et égale à AC, le point matériel dont il s'agit se transportera d'une extrémité à l'autre de cette droite, et se trouvera finalement en M.

On en conclut, 1° que le mobile ne sort pas du plan déterminé par les directions des deux forces;

2° Qu'il parcourt la diagonale du parallélogramme ayant pour côtés des lignes dirigées suivant les forces et proportionnelles à leurs intensités, car l'élimination de t entre les deux expressions de X et Y donne $\frac{X}{Y}=\frac{F''}{F'}$;

3° Que les espaces qu'il parcourt, comptés depuis le point de départ A, sont, comme X et Y, proportionnels aux quarrés des temps t;

4° Qu'il se meut par conséquent comme s'il était sollicité par une force unique R, dirigée suivant cette diagonale et satisfaisant à l'équation $AM=\frac{R}{m}\cdot\frac{t^2}{2}$, laquelle combinée avec $AB=\frac{F'}{m}\cdot\frac{t^2}{2}$ et $AC=\frac{F''}{m}\cdot\frac{t^2}{2}$, donne la double proportion

$$R : F' : F'' :: AM : AB : AC. \qquad [52]$$

Maintenant si l'on prend sur les directions des forces F', F'', à partir du point A, deux longueurs Ab, Ac, proportionnelles à ces forces, elles seront aussi proportionnelles à AB et AC; et si l'on achève le parallélogramme Abmc, semblable à ABMC, les diagonales coïncideront, et l'on aura

$$Am : Ab : Ac :: AM : AB : AC,$$

et par conséquent R : F' : F'' :: Am : Ab : Ac;

Donc, Théorème : *La force* R, *qui seule imprimerait à un point matériel libre partant du repos le mouvement qu'il prend en vertu de deux forces* F', F'', *est représentée, pour l'intensité*

et la direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes qui représentent de même les deux forces.

La force R s'appelle la *résultante* des forces F′ et F″, qui sont ses *composantes*, et la proposition qui vient d'être démontrée est connue sous le nom de *théorème du parallélogramme des forces.*

201. On remarquera qu'on peut également dire que la résultante des deux forces F′, F″, concourantes, qui sont représentées en intensité et en direction par deux droites AB, AC, est représentée de la même manière par la droite AM fermant un triangle (ABM ou ACM), qui a pour côtés une des deux droites AB, AC, et une parallèle à l'autre, dirigée en même sens.

202. Soient trois forces F′, F″, F‴, appliquées à un point matériel partant du repos. Dans une enveloppe douée du mouvement que prendrait le mobile sous l'action de la force F‴ seule, ce corps aura, en vertu des forces F′, F″, le même mouvement relatif que si l'enveloppe était immobile et que ces deux forces existassent seules (134); ce mouvement relatif est donc le même que celui qui serait produit par la résultante de F′ et F″, déterminée suivant la règle ci-dessus énoncée, et qu'on peut représenter par la notation *Rés.* (F′, F″). Cela posé, le mouvement absolu du mobile résulte du mouvement commun dû à F‴ et du mouvement relatif dû à *Rés.* (F′, F″); il est donc le même que s'il était produit par une force unique formée de *Rés.* (F′, F″) et de F‴, suivant le même théorème.

On raisonnera de même pour quatre forces, en considérant une enveloppe douée du mouvement dû à l'une d'elles. Ainsi de suite, on arrive à la règle suivante pour la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un point partant du repos :

THÉORÈME DU POLYGONE DES FORCES. *La résultante* R *d'un nombre quelconque de forces* F′, F″ ..... $F^{(n)}$, *appliquées à un même point, est représentée, pour la grandeur et la direction, par la droite fermant un polygone qui, partant du point d'application, a ses côtés égaux et parallèles en même sens aux droites qui représentent les composantes.*

203. De là et d'une proposition connue sur la projection d'un contour polygonal (*Géom. anal.*, 22), il résulte que si l'on représente par R_x, F'_x, F''_x..... les projections de la résultante R et de ses composantes F', F'',.... sur un axe Ox, quel que soit le plan coordonné yOz, on a

$$R_x = F'_x + F''_x + \ldots\ldots + F_x^{(n)},$$

ou, ce qui signifie, en abrégé, la même chose,

$$R_x = \sum F_x \qquad [53]$$

c'est-à-dire *que la projection sur un axe quelconque de la résultante de plusieurs forces concourantes est égale à la somme des projections des composantes sur le même axe.*

204. Connaissant les intensités des forces F', F'',.... $F^{(n)}$, et leurs angles avec trois axes rectangulaires, on aura l'intensité et la direction de la résultante par les formules

$$\left.\begin{aligned} R\cos(R,x) &= \sum F\cos(F,x) \\ R\cos(R,y) &= \sum F\cos(F,y) \\ R\cos(R,z) &= \sum F\cos(F,z) \\ R = \sqrt{(\textstyle\sum F\cos(F,x))^2 + (\sum F\cos(F,y))^2 + (\sum F\cos(F,z))^2} \end{aligned}\right\}[54]$$

dont la dernière se tire des trois autres élevées au quarré.

Dans ces équations R est essentiellement positive comme les forces F.

En prenant l'axe des x suivant R, ce qui est permis, puisque le système des trois axes rectangulaires est arbitraire, on a

$$\left.\begin{aligned} R &= \sum F\cos(F,R), \\ \sum F\cos(F,y) &= 0, \\ \sum F\cos(F,z) &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad [55]$$

c'est-à-dire que l'*intensité de la résultante de plusieurs forces concourantes est égale à la somme algébrique des projections des composantes sur la direction de la résultante*, *et la somme algébrique des projections des mêmes composantes sur un axe perpendiculaire à la résultante est nulle.*

205. La résultante de trois forces non situées dans un même plan est la diagonale du parallélipipède construit sur les trois

composantes. De là se déduit la *décomposition* d'une force en trois autres de directions données.

206. Si les trois forces F', F'', F''', sont perpendiculaires entre elles, on a, comme cas particulier des formules [54],

$$F' = R\cos(R,F'),\quad F'' = R\cos(R,F''),\quad F''' = R\cos(R,F'''),$$
$$F'^2 + F''^2 + F'''^2 = R^2,$$

d'où se tirent R et ses trois angles avec les composantes.

207. Si R est la résultante de deux forces F', F'', le triangle ABM (*fig.* 20), dont les côtés sont proportionnels et parallèles aux trois forces et de même sens, donne (*Géom. anal.*, 67), en remarquant que l'angle ABM est supplément de l'angle des forces F', F'', que, par conséquent, ces deux angles ont le même sinus, tandis que leurs cosinus, égaux en valeurs absolues, sont de signes contraires,

$$R^2 = F'^2 + F''^2 + 2F'F''\cos(F',F'');$$
$$\frac{F'}{\sin(F'',R)} = \frac{F''}{\sin(F',R)} = \frac{R}{\sin(F',F'')}.$$

Si les deux composantes sont égales, en désignant leur intensité par F et leur angle par α, on a, d'après la première des formules [55], $R = 2F\cos\frac{1}{2}\alpha.$

En général, on peut se proposer sur les trois forces F', F'', R, et sur leurs angles, toutes les questions de la trigonométrie. On les résout, soit graphiquement, soit par le calcul.

§ 2. *Mouvement d'un point sous l'influence d'une ou de plusieurs forces quelconques. — Projection de ce mouvement sur un axe.*

208. Si des forces divergentes agissent sur un point matériel partant du repos, et l'accompagnent pendant son mouvement en conservant leurs intensités et restant parallèles à leurs premières directions, on vient de voir que le mouvement de ce point est rectiligne et facile à déterminer en substituant la résultante aux composantes.

Mais si le mobile possède une vitesse précédemment acquise

dont la direction ne soit pas sur la même droite que celle de la résultante, le mouvement qui a lieu est curviligne, et sa détermination repose, comme nous allons le montrer, sur le principe expérimental énoncé au n° 132, et qui a déjà servi (133) à établir que, dans le mouvement rectiligne, sous l'action de forces dirigées suivant la même droite que la vitesse, l'accélération est indépendante de la vitesse acquise, et reste constante si la somme algébrique de ces forces ne varie pas.

On considérera d'abord ici le cas où les forces sont constantes d'intensité et de direction, c'est-à-dire qu'elles se transportent parallèlement à elles-mêmes avec le point matériel auquel elles s'appliquent; telle est, par exemple, l'action de la pesanteur sur un corps lancé avec une vitesse oblique à l'horizon.

Soient (*fig.* 21) :

R la résultante des forces actuellement agissantes,

A la position initiale du mobile,

AX la direction de la vitesse initiale v_0, produite par l'action antérieure de forces quelconques,

AY la direction de la résultante actuelle R,

AB = X le chemin que parcourrait le mobile dans le temps t si la vitesse v_0 existait seule, sans la force R, de sorte qu'on a

$$X = v_0 t,$$

AC = Y le chemin qu'il parcourrait dans le même temps t, en vertu de la force R, si la vitesse initiale v_0 n'existait pas, d'où résulte (154) $\qquad Y = \frac{1}{2}\,\frac{R}{m}t^2.$

Si l'on imagine une enveloppe mobile douée de la vitesse v_0, la droite AC, considérée comme une suite de points géométriques liés à cette enveloppe, se trouvera au bout du temps t transportée en BM, droite parallèle et égale à AC. Or pendant ce temps le point matériel dont il s'agit devra, en vertu de son mouvement relatif, passer successivement par ces mêmes points géométriques; donc il se trouvera finalement en M. On en conclut :

1° Que le point M ne sort pas du plan déterminé par les directions initiales de la vitesse et de la force ;

2° Que ses coordonnées, par rapport à ces directions AX, AY, étant désignées par X et Y, après un temps t quelconque sont exprimées par les équations

$$X = v_0 t, \qquad Y = \frac{1}{2}\frac{R}{m}t^2;$$

d'où, en éliminant t, on trouve

$$Y = \frac{R}{2mv_0^2}X^2$$

pour l'équation de la courbe parcourue par le mobile rapportée aux axes AX, AY. C'est une parabole tangente à la direction AX de la vitesse initiale, et ayant son axe principal parallèle à la direction AY de la force constante R (*Géom. anal.*, 124). Il est facile de la construire par points.

On voit qu'il faut se garder de croire que le mobile décrit la diagonale du parallélogramme ABMC, comme si la vitesse v_0 était une force constante, agissant en même temps que celles dont la résultante est R. On ne doit pas non plus dire que le mouvement du point matériel de A en M est dû à une résultante de la force actuelle R, et de la force antérieure qui a produit la vitesse v_0; car on ne peut combiner ou composer plusieurs forces pour en conclure une résultante, que dans le cas où ces forces agissent simultanément.

209. Les axes AX, AY nous ont été naturellement fournis, l'un par la direction de la vitesse initiale, l'autre par la direction de la résultante. Mais il est souvent utile de considérer le mouvement d'un point rapporté à des axes coordonnés quelconques.

Imaginons donc un axe Ox situé d'une manière quelconque dans l'espace, et supposons que, pendant que le point parcourt la courbe AM, on projette sur cet axe Ox les positions successives du mobile par des droites parallèles à un plan quelconque yOz. Cela posé, cherchons la loi du mouvement de la projection mobile qui est en P_0 à l'instant initial, et en P à la fin du temps t.

Appelons

x l'abscisse variable OP,

x_0 sa valeur initiale OP_0,

v_{0x} la projection de la vitesse initiale v_0 sur l'axe des x,

R_x la projection de la force R sur ce même axe.

En remarquant, 1° que P_0P est la somme algébrique des projections de AB et de BM ou AC ;

2° Que AB étant v_0t, sa projection peut s'obtenir en multipliant la projection de v_0 ou v_{0x} par le nombre t;

3° Que AC étant $R \cdot \frac{1}{2}\frac{t^2}{m}$, sa projection s'obtient en multipliant la projection de R ou R_x par $\frac{1}{2}\frac{t^2}{m}$, attendu que AC et R ayant la même direction, on peut poser la proportion

projection de AC : AC : : projection de R : R;

4° Que R_x est égale à $\sum F_x$ (203);

$$\left.\begin{array}{ll} \text{on a} & x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}\frac{R_x}{m}t^2, \\ \text{ou} & x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}\frac{\sum F_x}{m}t^2, \end{array}\right\} \quad [56]$$

équations dans lesquelles les quantités x, x_0, v_{0x}, R_x, F_x, doivent être prises algébriquement, c'est-à-dire avec leurs signes.

En comparant cette équation à la dernière du n° 153, avec laquelle elle a une analogie évidente, on arrive à cette proposition très-remarquable :

Théorème. *Si un point matériel se meut dans l'espace en vertu d'une vitesse initiale* v_0 *et sous l'action de forces* F *constantes, et si on le projette à chaque instant sur un axe quelconque, sa projection s'y mouvra comme un corps qui, ayant même masse que le mobile dont il s'agit, aurait pour vitesse initiale la projection de la vitesse initiale* v_0, *et pour force agissante la somme algébrique des projections des forces* F *ou la projection de leur résultante.*

210. Il est aisé et il importe beaucoup de reconnaître que ce théorème subsiste quand les forces sont variables, soit en intensité, soit en direction. Il suffit pour cela de concevoir le temps partagé en intervalles infiniment petits, pendant chacun desquels toutes les forces peuvent être considérées comme

constantes; la courbe décrite est alors assimilée à une suite d'arcs de parabole, très-petits et tangents deux à deux, mais pouvant être dans des plans différents; et, pendant que chaque petit arc est parcouru, la projection du mobile sur un axe se meut suivant la loi qui vient d'être énoncée.

211. D'après le théorème du n° 209 ainsi étendu, on peut appliquer au mouvement curviligne les théorèmes établis pour le mouvement rectiligne, en substituant aux vitesses v_0 et v, et aux forces agissantes F leurs projections sur un axe quelconque.

Ainsi, 1° la formule fondamentale de l'accélération (154 donne

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\sum F_x}{m} \quad \text{ou} \quad mdv_x = R_x dt \quad \text{ou} \quad md \cdot \frac{dx}{dt} = \sum F_x . dt,$$

ce qui démontre ce Théorème : *L'accélération du mouvement de la projection sur un axe est égale à la somme algébrique des projections des forces sur cet axe, divisée par la masse du mobile.*

2° La formule de la quantité de mouvement ou de l'effet de l'impulsion donne (159 et 160)

$$\left.\begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= \int R_x dt \\ \text{ou} \qquad mv_x - mv_{0x} &= \sum \int F_x dt, \end{aligned}\right\} \qquad [57]$$

3° Et celle de l'effet du travail (166 et 167) donne

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} mv_x^2 - \tfrac{1}{2} mv_{0x}^2 &= \int R_x dx \\ \text{ou} \qquad \tfrac{1}{2} mv_x^2 - \tfrac{1}{2} mv_{0x}^2 &= \sum \int F_x dx . \end{aligned}\right\} \qquad [58]$$

212. La deuxième des équations [57] se traduit comme il suit en un théorème dont celui du n° 160 n'est qu'un cas particulier :

Théorème. *Si un point matériel se meut d'une manière quelconque dans l'espace, l'accroissement de sa quantité de mouvement projetée sur un axe quelconque est égal à la somme al-*

gébrique des impulsions des forces projetées sur le même axe et calculées pour le même temps.

Les équations [58] pourraient se traduire d'une manière analogue en langage ordinaire.

§ 3. *Mouvement d'un point considéré indépendamment de la courbure de la ligne qu'il décrit. Effet du travail des forces quelconques. Effet de la force tangentielle.*

213. Supposons d'abord qu'une courbe soit décrite par un point matériel sous l'influence d'une résultante R dont la direction soit constante, c'est-à-dire que cette force se transporte parallèlement à elle-même avec son point d'application, son intensité étant d'ailleurs quelconque, constante ou variable.

Prenons l'axe des x de même direction que R, et appliquons à ce cas l'équation [58] du n° 211, nous aurons

$$\frac{1}{2} mv_x^2 - \frac{1}{2} mv_{0x}^2 = \int R dx.$$

Pour deux autres axes rectangulaires entre eux et avec l'axe des x, la même formule donne, attendu que les projections R_y et R_z sont nulles dans ce cas,

$$\frac{1}{2} mv_y^2 - \frac{1}{2} mv_{0y}^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} mv_z^2 - \frac{1}{2} mv_{0z}^2 = 0.$$

En ajoutant ces trois équations, en remarquant qu'on a (30)

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2, \qquad \text{et} \qquad v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2,$$

et en remplaçant dx par $ds \cos(ds, x)$ ou $ds \cos(\mathrm{R}, ds)$, on obtient

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int R ds \cos(\mathrm{R}, ds),$$

équation qui, d'après la définition du n° 74, signifie que *l'accroissement de la puissance vive du point matériel pendant un certain temps est égal au travail total de la résultante des forces qui le sollicitent pendant le même temps.*



9.

214. Cette proposition vient d'être établie en supposant que la direction de la force R soit constante. Dans le cas où cette direction serait variable, on pourrait la considérer comme constante pendant des petits temps θ_1, θ_2... pour chacun desquels on aurait une équation pareille à la dernière du numéro précédent. Ainsi en désignant les travaux successifs de R par $\mathfrak{T}_1 R$, $\mathfrak{T}_2 R$, ... on a

pour le temps θ_1.......... $\frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathfrak{T}_1 R$,

pour le temps θ_2.......... $\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = \mathfrak{T}_2 R$,

....

pour le dernier temps θ_n.... $\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_{n-1}^2 = \mathfrak{T}_n R$;

d'où, en ajoutant et remarquant que la somme des seconds membres est le travail total de la résultante variable R, on conclut

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathfrak{T}R \\ \text{ou} \quad \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int R\, ds \cos(R, ds), \end{array}\right\} \quad [59]$$

équation dont l'énoncé est le même qu'au numéro précédent, mais sans aucune hypothèse sur la direction des forces.

215. Si F', F'', F'''... sont toutes les forces quelconques qui agissent sur le point matériel, on a, d'après la propriété générale de la résultante (202), et par analogie avec les formules du n° 204,

$$R \cos(R, ds) = F' \cos(F', ds) + F'' \cos(F'', ds) + F''' \cos(F''', ds) + \ldots$$

En multipliant par ds, puis en intégrant, on obtient

$$\int R\, ds \cos(R, ds) = \int F' ds \cos(F', ds) + \int F'' ds \cos(F'', ds) + \ldots [60]$$

C'est-à-dire que *le travail de la résultante de plusieurs forces est égal à la somme algébrique des travaux de ces forces.*

216. La proposition démontrée aux n°s 213 et 214, et dont celle du n° 168 n'est qu'un cas particulier, peut donc s'énoncer ainsi :

THÉORÈME. *L'accroissement de la puissance vive d'un point matériel soumis à des forces quelconques, est égal à la somme algébrique des travaux de toutes ces forces entre les mêmes instants extrêmes.*

C'est ce que nous appellerons le *théorème de l'effet du travail total des forces* qui agissent sur un point matériel.

Sa notation abrégée est

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum \mathfrak{T}F. \qquad [61]$$

217. Reprenons l'équation finale du n° 244

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int R\cos(R,ds).ds. \qquad [59]$$

Le produit $R\cos(R, ds)$, projection orthogonale de la résultante, ou somme des projections orthogonales des composantes F', F'', ... à un instant quelconque, sur la tangente menée dans la direction du mouvement à cet instant, s'appelle la *force totale tangentielle* à cet instant.

Représentons cette force positive ou négative, constante ou variable, par ψ, l'équation [53] devient

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int \psi ds,$$

et en la comparant à l'équation [29] du n° 166, on arrive à cette proposition importante :

THÉORÈME. *Un point matériel sollicité par des forces quelconques a, sur la courbe qu'il parcourt, le même mouvement qu'il aurait sur une droite s'il était à chaque instant sollicité suivant cette droite par une force égale à la force totale tangentielle.*

En d'autres termes, la vitesse, et par conséquent l'accélération et les espaces parcourus, ne dépendent que de la force totale tangentielle, tandis que, comme on le verra bientôt, la composante conjuguée normale combinée avec la vitesse acquise détermine la *courbure* de la ligne décrite.

218. COROLLAIRE I. Si la force tangentielle est constante,

le mouvement curviligne est uniformément varié, et les équations [25] du n° 153

$$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}, \quad mv-mv_0=Ft, \quad x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2,$$

subsistent dans ce mouvement curviligne, pourvu que les x soient comptées suivant la courbe, et que par F on entende la force tangentielle constante ψ ou $R\cos(R, ds)$.

En appelant donc s les espaces comptés sur cette courbe à partir d'une origine quelconque jusqu'aux positions successives du mobile, on aura

$$\frac{dv}{dt}=\frac{R\cos(R,ds)}{m}$$

$$mv-mv_0=R\cos(R,ds).t$$

et
$$s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}\frac{R\cos(R,ds)}{m}t^2.$$

219. Corollaire II. Soit que la force tangentielle reste constante, soit qu'elle varie, l'équation [27] du n° 159', $mv-mv_0=\int Fdt$, relative au mouvement rectiligne, subsiste pour le mouvement curviligne, pourvu qu'on remplace F par la force tangentielle. Elle devient

$$mv-mv_0=\int R\cos(R, ds).dt, \qquad [62]$$

et peut s'énoncer en disant que *l'accroissement de la quantité de mouvement d'un point matériel est égal à l'impulsion totale de la force totale tangentielle dans le même temps.*

220. Corollaire III. L'équation

$$\frac{dv}{dt}=\frac{R\cos(R, ds)}{m}, \qquad [63]$$

déduite de l'équation du n° 154 en remplaçant F par la force tangentielle, subsiste dans tous les cas du mouvement curviligne, et s'énonce en disant que *l'accélération du mouvement d'un point matériel est égale à la force tangentielle totale divisée par la masse de ce point.*

Cette équation [63] renferme implicitement, 1° celle [62] du n° 219, qu'on obtient en multipliant les deux membres par mdt et en intégrant; 2° celle [59] du n° 214, qu'on ob-

tiendrait en multipliant les deux membres par mds, en mettant ensuite pour $\frac{ds}{dt}$ sa valeur v, et enfin en intégrant.

§ 4. *Trajectoire d'un point pesant dans le vide.*

221. Une des applications les plus simples des propositions établies dans les deux paragraphes précédents, consiste dans l'étude du mouvement d'un point matériel pesant dans le vide, avec une vitesse initiale d'une direction quelconque.

1° Si l'on prend l'axe AX (*fig.* 22) suivant la vitesse initiale V, et l'axe AY vertical suivant la force mg, poids du corps considéré (150), on aura, en appliquant immédiatement ce qu'il a été dit au n° 208,

$$X = Vt, \quad Y = g\frac{t^2}{2}, \quad Y = \frac{g}{2V^2}\cdot X^2;$$

ce qui permet de construire la parabole par points et d'assigner la position du mobile à chaque instant.

Dans le cas où la vitesse V est horizontale, le sommet de la parabole est au point de départ A.

2° Supposant que la vitesse initiale fasse un angle α au-dessus de l'horizon, si l'on prend deux axes rectangulaires, Ox horizontal, et Oy vertical de bas en haut, on aura, par le théorême du n° 209,

$$x = V\cos\alpha\,.\,t, \qquad y = V\sin\alpha\,.\,t - \frac{1}{2}gt^2,$$

d'où, en éliminant t, on conclut l'équation de la courbe ou trajectoire,

$$y = x\tang\alpha - \frac{g}{2V^2\cos^2\alpha}\cdot x^2. \qquad [64]$$

Les coordonnées x, y, du point culminant M_1 répondent à $\frac{dy}{dx}=0$, ou $\tang\alpha - \frac{g}{V^2\cos^2\alpha}x_1 = 0$, d'où $x_1 = \frac{V^2}{g}.\sin\alpha\cos\alpha$, et en substituant dans [64],

$$y_1 = \frac{V^2}{2g}\,.\,\sin^2\alpha. \qquad [65]$$

On arrive au même résultat en remarquant que, d'après le

théorème du n° 209, la projection du mobile sur l'axe Oy se meut comme un corps lancé verticalement avec la vitesse $V \sin\alpha$, et, par conséquent (144), s'élève jusqu'à la hauteur $y_1 = \frac{V^2 \sin^2\alpha}{2g}$ due à cette vitesse dans le temps $\frac{V \sin\alpha}{g}$; puis, substituant cette dernière valeur de t dans l'équation

$$x = V \cos\alpha . t,$$

on a, comme ci-dessus,

$$x_1 = \frac{V^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2g}, \text{ ou plus simplement } x_1 = \frac{V^2}{2g} \sin 2\alpha. \quad [66]$$

La courbe décrite venant rencontrer en P_2 l'horizontale Ox menée par le point de départ O, la distance OP_2 s'appelle l'*amplitude horizontale du jet;* c'est la valeur de x qui répond à $y = 0$. La seconde équation donne alors $t = \frac{2V \sin\alpha}{g}$, temps double de la durée de l'ascension de O en M_1; et, en substituant dans $x = V \cos\alpha . t$, on a

$$OP_2 = x_2 = \frac{2V^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \text{ ou plus simplement } x_2 = \frac{V^2}{g} . \sin 2\alpha.$$

Le maximum de l'amplitude horizontale, quand on fait varier α, en conservant la même vitesse initiale V, répond à celui de $\sin\alpha \cos\alpha$ ou de $\sin 2\alpha$, ce qui a lieu pour $2\alpha = 90°$, et l'on a alors $x_2 = \frac{V^2}{g}$; c'est-à-dire que la plus grande amplitude horizontale est double de la hauteur due à la vitesse initiale, et a lieu quand cette vitesse fait un angle de 45° au-dessus de l'horizon.

222. La vitesse en un point dont l'ordonnée est y s'obtient immédiatement par le théorème de l'effet du travail (216). Pour cela, on remarquera (139) que l'action de la pesanteur sur un point matériel étant une force constante et parallèle à une même direction (dans le cas ordinaire de l'expérience), il résulte de l'observation faite au n° 78 que le travail de cette force, entre deux positions quelconques du mobile, est égal au produit de son intensité qui est le poids de ce corps, multipliée par la hauteur dont il est descendu au-dessous du plan

horizontal passant par la position initiale, en entendant par là que si la position finale est supérieure, le travail est négatif.

Ainsi, dans l'équation $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mV^2 = \mathfrak{E}F$, on remplacera $\mathfrak{E}F$ par $-mgy$, et l'on aura

$$v^2 = V^2 - 2gy.$$

On obtiendrait le même résultat, sans faire usage du théorème de l'effet du travail, en posant les expressions des vitesses des projections sur les deux axes (209), $v_x = V\cos\alpha$, $v_y = V\sin\alpha - gt$; puis, en les substituant dans la formule (31), $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

223. Supposons que, la courbe étant donnée par l'observation, on demande la vitesse initiale V.

Si l'on peut mesurer l'amplitude $2x_1$ et l'angle α, on aura, d'après [66], $V^2 = 2x_1 g \frac{1}{\sin 2\alpha}$.

Si, au lieu de l'amplitude, on a l'élévation y_1, on en déduira, d'après [65], $V^2 = 2gy_1 \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

En général, par les coordonnées de deux points de la courbe outre l'origine, on pourra obtenir l'équation de la parabole (*Géom. anal.*); puis, la comparant à celle qui a été obtenue ci-dessus [64], on aura les valeurs de $\tang\alpha$ et de $V^2\cos^2\alpha$, d'où l'on conclura V, en se servant de la relation

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tang^2\alpha}.$$

224. Si l'on veut déterminer par le calcul le point d'intersection de la trajectoire et d'une autre ligne, droite ou courbe, donnée dans son plan, il suffit de combiner l'équation [64] avec celle de la ligne donnée, en considérant x et y comme les coordonnées du point de rencontre.

Si l'on cherchait l'amplitude du jet AN (*fig.* 22), sur une ligne AB inclinée à l'horizon, on pourrait procéder directement en prenant cette droite pour axe des abscisses x, et conservant l'axe des y vertical. Dans ce système de coordonnées obliques, en représentant par V_x et V_y les deux

projections conjuguées de la vitesse initiale V, on aurait (209) les équations

$$x = V_x, \quad y = V_y t - \frac{1}{2} g t^2, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{V_y}{V_x} x - \frac{g}{2 V_x^2} x^2 ;$$

et en faisant $y = 0$, on trouverait l'amplitude suivant AB,

$$x = AN = \frac{2}{g} V_x V_y .$$

Supposons maintenant qu'on donne la direction AB, ainsi que la vitesse V, et qu'on demande quelle doit être la direction de V dans l'angle donné yAB, pour que l'amplitude AN soit un *maximum*. En désignant par β et β' les angles inconnus XAB, XAy dont la somme est donnée, on aura (*Géom. anal.*, 65)

$$V_x = V \frac{\sin \beta'}{\sin(\beta + \beta')} \qquad \text{et} \qquad V_y = V \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \beta')} .$$

On en conclura que le *maximum* de AN répond à celui de $\sin \beta \sin \beta'$, et, par conséquent (*Géom. anal.*, 259), à $\beta = \beta'$; c'est-à-dire que la direction de la vitesse initiale doit partager l'angle yAB en deux parties égales, comme dans le cas particulier où AB est horizontale (221).

§ 5. *Mouvement d'un point sur un plan donné sans frottement.*

225. Les principes établis jusqu'ici conduisent à trouver le mouvement d'un point soumis à des forces données quand on connaît son mouvement initial. Il s'agit maintenant d'étudier le mouvement d'un point lorsqu'on ne connaît *à priori* qu'une partie des forces qui le sollicitent, le manque de données à l'égard des forces étant compensé par les conditions auxquelles est assujetti le mouvement cherché.

Si un point se meut sur une surface déterminée, il peut arriver, dans un cas très-particulier, que cette surface contienne la courbe que le point décrirait en vertu de sa vitesse initiale et des forces qui le sollicitent, indépendamment de l'existence de la surface. Alors celle-ci ne change rien au mouvement.

Mais si le point reste sur une surface en y décrivant une

ligne différente de celle qu'il suivrait en vertu des forces indépendantes de la surface, c'est qu'alors la surface, ou plutôt le corps que cette surface termine, exerce sur le point une certaine force qui s'appelle la *résistance* ou la *réaction* de la surface, et qui, se composant avec les autres, produit le mouvement effectif.

226. Lorsque, par exemple, la surface sur laquelle glisse un point matériel est plane, si la résultante R des forces F, F', F'',... indépendantes de ce plan (telles que le poids du mobile, l'action d'un moteur, etc.), qui le sollicitent, a sa direction hors de cette surface, il faut en conclure que la réaction R_1 du plan est telle que, se composant avec cette résultante partielle R, elle donne une résultante définitive φ *suivant le plan*, puisque sans cela le point sortirait de ce plan (208).

Cette conclusion se présente souvent sous une autre forme : si l'on décompose la résultante partielle R en deux forces, l'une normale N, l'autre tangentielle T, et qu'on en fasse autant de la réaction R_1 décomposée en réaction normale N_1 et en réaction tangentielle T_1, il faut que les deux forces N et N_1 soient égales et opposées, ou, comme on dit, se détruisent, pour que la résultante définitive φ soit dans le plan.

Mais cette égalité de la composante normale de la résultante des forces indépendantes d'une part, et de la réaction normale d'autre part, n'a pas lieu quand la surface est courbe et que le point a une vitesse acquise; car alors la résultante totale φ n'est pas dans le plan tangent, puisque le mouvement est curviligne hors de ce plan.

227. Dans tous les traités de mécanique rationnelle, on suppose l'existence de surfaces parfaitement invariables de forme et parfaitement polies, n'opposant aux corps qui les pressent qu'une résistance ou réaction normale, de sorte que la réaction tangentielle serait nulle.

Les choses ne se passent pas ainsi dans la nature, et pour se représenter l'action d'une surface fixe sur laquelle se meut un corps, il faut, en outre de la réaction normale, appliquer au mobile une force appelée *frottement*, dirigée en sens contraire du mouvement, tangentiellement à la surface.

Les questions suivantes, dans lesquelles on fait abstraction du frottement, ne doivent donc être considérées que comme des exercices. Elles seront reprises plus tard en ayant égard au frottement.

228. ***Mouvement d'un point matériel pesant sur un plan incliné sans frottement.***

Le corps est effectivement sollicité par deux forces, l'une verticale, qui est son poids p, l'autre N_1, réaction normale du plan. Leur résultante est dans le plan incliné; elle est aussi dans le plan de ses deux composantes, qui est à la fois vertical et perpendiculaire au plan incliné; d'où il suit qu'elle est dirigée suivant la ligne de plus grande pente. Son intensité φ est (203) $p \sin i$ ou $\frac{ph}{l}$ (*fig.* 23). On obtient le même résultat, mais avec moins de netteté dans les idées et d'exactitude dans le langage, en disant que le poids p, force verticale, étant décomposée en deux, l'une perpendiculaire au plan, l'autre parallèle, la première de ces composantes est détruite par la résistance du plan, et la seconde est la force effective.

Si le corps est parti du repos, les équations du mouvement deviennent

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varphi}{m} = g \sin i, \quad x = \frac{1}{2} g \sin i t^2, \quad v = g \sin i . t,$$

$$v^2 = 2gx \sin i.$$

En supposant que le corps ait parcouru la longueur l, et soit descendu de la hauteur h, on peut demander la vitesse acquise et le temps de la descente.

1° Pour la vitesse, on a (4ᵉ équation ci-dessus)

$$v = \sqrt{2gl \sin i} = \sqrt{2gh},$$

ce qu'on trouverait immédiatement par la considération du travail de la force p, attendu que le travail de la résistance du plan est nul, cette force étant supposée perpendiculaire au chemin décrit.

2° Le temps de la descente, d'après la 2ᵉ équation ci-dessus, est

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin i}} = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}} = l\sqrt{\frac{2}{gh}}.$$

Ainsi, deux mobiles partant sans vitesse initiale d'un même point, et suivant deux plans inclinés quelconques, arrivent au même plan horizontal avec des vitesses égales, mais dans des temps inégaux, proportionnels aux longueurs parcourues.

229. Si pour divers plans inclinés les quantités l et h satisfaisaient à la condition $\frac{l^2}{h} =$ constante, le temps de la descente serait constant. Il suffit pour cela que les plans aient les mêmes longueurs et les mêmes inclinaisons que des cordes aboutissant à l'une des extrémités du diamètre vertical d'un même cercle (*fig.* 24). Si r est le rayon de ce cercle, on a

$$l^2 = 2rh, \qquad \text{et} \quad t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

230. Problème. *Étant donnés un point* A *et un plan* BC, *déterminer le plan incliné* AP *suivant lequel un corps pesant parti de* A, *sans vitesse initiale, arrivera au plan* BC, *dans le temps le plus court* (fig. 25).

Si l'on imagine une sphère passant par A, qui ait son centre O sur la verticale AB et qui soit tangente au plan BC, la droite AP cherchée joindra le point donné A au point de contact P; car toute autre droite AQ, excédant la corde correspondante AM, exigera plus de temps pour son parcours.

On voit aisément que la droite cherchée AP divise en deux parties égales l'angle BAD de la verticale AB et de la normale AD au plan.

231. Si, outre son poids p, le mobile appuyé sur un plan incliné est sollicité par une force Q dirigée dans un plan vertical perpendiculaire au plan incliné (*fig.* 26), la résultante des forces p, Q et de la réaction du plan étant parallèle à ce plan suivant lequel le mouvement a lieu, la valeur de cette force, prise positivement dans le sens de la descente, est (204)

$$F = p \sin\alpha - Q \cos\beta.$$

Lorsque Q est parallèle au plan, on a $F = p \sin\alpha \pm Q$;

Si Q est horizontale, $F = p \sin\alpha \pm Q \cos\alpha$.

S'il n'y a pas de vitesse initiale, le corps descend ou monte

selon que la force F ainsi calculée est positive ou négative. Il y a équilibre si elle est nulle (*).

§ 6. *Force centripète dans le mouvement circulaire et en général dans le mouvement curviligne.*

232. *Mouvement circulaire.* Si un point matériel décrit, d'un mouvement uniforme ou varié, une circonférence ou seulement un arc de cercle, on en conclut, quelles que soient les circonstances de ce mouvement circulaire :

1° Que le point dont il s'agit est continuellement sollicité par une ou plusieurs forces indépendamment de celles qui ont agi antérieurement pour produire sa vitesse actuelle, sans quoi il se mouvrait en ligne droite (128);

2° Que leur résultante est dans le plan du cercle (208).

Si à un instant quelconque on décompose cette résultante en deux forces, l'une tangentielle ψ, l'autre normale χ, la première est égale au produit de l'accélération qui a lieu à l'instant considéré multipliée par la masse du mobile, comme si le mouvement était rectiligne (220). Ainsi, $\psi = m\,\frac{dv}{dt}$; et la force normale χ agit dans le sens allant de la circonférence au centre (208), ce qui lui a fait donner le nom de *force centripète.*

233. Problème. *Déterminer l'intensité* χ *de la force centripète en fonction de la masse* m *du mobile, de sa vitesse* v *et du rayon* r *de l'arc de cercle décrit.*

Supposons qu'à l'instant considéré le point matériel soit en M (*fig.* 27), qu'après un petit temps θ il soit en M'; et appliquons à la projection mobile de ce point sur le rayon MO, le théorème du n° 209. Cette projection décrira pendant le temps θ l'espace MP avec un mouvement dont la vitesse

(*) Nous verrons que les solutions indiquées aux n°s 228 à 231 ne sont pas applicables à la pratique, à cause du frottement, et qu'elles ne conviennent pas même, comme on pourrait le croire, au cas d'une petite sphère homogène roulant sur un plan incliné.

initiale sera nulle, puisque, à l'instant du passage du mobile au point M, la vitesse v est perpendiculaire à l'axe MO. A ce même instant initial, la projection de la force χ sur MO est cette force elle-même, tandis que la projection de ψ est nulle.

Pendant tout le parcours depuis M jusqu'au point très-voisin M', l'intensité de la force normale variera très-peu, et sa projection sur MO différera aussi peu qu'on voudra de χ, pourvu qu'on prenne l'arc MM' assez petit. En même temps, la projection de la force tangentielle ψ sur MO différera aussi peu qu'on voudra de *zéro*. Donc, sauf une erreur relative qu'on rendra aussi petite qu'on voudra en faisant décroître MM', on peut supposer MP égal à l'espace qui serait décrit par un mobile ayant la masse m, et constamment sollicité par la force χ. Par conséquent, en désignant le segment MP par x, on peut poser l'équation

$$x = \frac{1}{2}\frac{\chi}{m}\theta^2. \qquad [67]$$

Nous venons de dire que l'on commet ainsi une très-petite erreur *relative*, ce qui signifie que la quantité qui manque au second membre est non-seulement très-petite par rapport à l'unité de longueur, mais une fraction très-petite de la valeur écrite $\frac{1}{2}\frac{\chi}{m}\theta^2$ ou de x. De là résulte une conséquence très-importante : c'est que l'équation [67], à la rigueur inexacte ou incomplète, tant que x et θ représentent des quantités finies ou réellement existantes, devient rigoureusement exacte, si l'on comprend que le rapport $\frac{x}{\theta^2}$ des quantités très-petites qui figurent dans les deux membres, doit être remplacé par la limite dont il s'approche *indéfiniment*, c'est-à-dire autant qu'on veut, à mesure que x et θ^2 décroissent simultanément. C'est ce qu'on exprime d'une manière abrégée en disant que l'équation [67] devient tout à fait exacte lorsque x et θ sont *infiniment petits*.

Soit s le petit arc MM'; $\frac{s}{\theta}$ est la vitesse moyenne dans

l'étendue de cet arc; et à mesure que celui-ci diminue on a, avec une erreur qui disparaît à la limite, $\frac{s}{\theta} = v$, d'où, pour être substitué dans [67],

$$\theta^2 = \frac{s^2}{v^2}. \qquad [68]$$

Enfin, à mesure que l'arc s diminue et approche de se confondre avec sa corde, on a, aussi exactement qu'on veut, la relation

$$s^2 = 2rx. \qquad [69]$$

En éliminant x, θ, et s, ce qui se fait en multipliant entre elles les équations [67], [68], [69], on obtient

$$1 = \frac{\chi r}{mv^2}, \quad \text{d'où} \quad \chi = \frac{mv^2}{r}, \qquad [70]$$

résultat dégagé de toute quantité décroissante, et par conséquent rigoureusement exact, puisque, s'il contenait une erreur, on serait libre de l'atténuer en faisant décroître les variables θ, x, s, qui n'y entrent pas, sans changer les constantes χ, m, v^2, r; ce qui serait absurde.

La formule [70] est l'expression cherchée de la force centripète.

234. Lorsque la force tangentielle est nulle, la vitesse est constante, et réciproquement (211 et 128); dans ce cas, la force centripète est aussi constante.

235. *Premier exemple de mouvement circulaire.*

Concevons qu'un fil inextensible et dont la masse puisse être négligée ait une de ses extrémités fixe, et que l'autre extrémité soit attachée à un point matériel. Si celui-ci est mis en mouvement et ensuite abandonné à la seule force qu'exercera sur lui le fil tendu, la pesanteur étant supposée ne pas exister, le mouvement du corps dont il s'agit sera circulaire et uniforme, $\frac{mv^2}{r}$ sera l'intensité de la force exercée par le fil sur le mobile.

Ici se trouve l'occasion d'appliquer un principe ou loi générale de la nature, sur lequel nous reviendrons avec détail (section 3, chap. I), et qu'on énonce en ces termes : *Toute action est accompagnée d'une réaction égale et contraire.* En

vertu de ce principe, le corps que nous venons de considérer, recevant du fil qui le retient sur la circonférence une force $\frac{mv^2}{r}$, exerce réciproquement sur le fil, et par conséquent sur le point central fixe, une force de même intensité $\frac{mv^2}{r}$, mais dirigée dans le sens allant du centre à la circonférence.

Cette force, égale et contraire à la force centripète, s'appelle *force centrifuge*. Elle n'agit point sur le corps décrivant la circonférence dont le rayon est r; elle est, au contraire, exercée par lui sur le corps qui le retient sur cette circonférence.

On ferait les remarques analogues sur un point matériel décrivant un cercle en vertu d'une vitesse acquise et sans autre force actuelle que celle qu'il obtiendrait en s'appuyant sur la concavité d'une courbe sans frottement. Dans ce cas, c'est la courbe qui exerce sur le corps la force centripète nécessaire à son mouvement circulaire, et le corps réciproquement exerce sur la courbe la force centrifuge.

236. *Deuxième exemple du mouvement circulaire.*

Si le point matériel M est retenu par deux fils tendus MA′, MA″ (*fig.* 28), dont les extrémités A′, A″, soient fixes, et si l'on fait encore dans ce cas abstraction de la pesanteur, la force centripète χ égale à $\frac{mv^2}{r}$, en désignant par r la distance MO, est la résultante des deux forces F′, F″, exercées suivant MA′ et MA″ par ces fils sur le mobile M. Les intensités de F′ et F″ sont faciles à déterminer en fonctions des angles de la figure, car on a (207)

$$\frac{F'}{\sin A''MO} = \frac{\chi}{\sin A'MA''} \quad \text{et} \quad \frac{F''}{\sin A'MO} = \frac{\chi}{\sin A'MA''}.$$

Ces intensités sont appelées les *tensions* des fils.

En vertu du principe de l'égalité entre l'action et la réaction contraire, les forces F′, F″, composantes de χ, sont respectivement égales et opposées à celles que le point matériel exerce sur les fils et que les fils exercent sur les points fixes A′, A″. De là, il résulte que les tensions des fils et les forces exercées par eux sur les points fixes A′, A″ sont les mêmes

que si, les fils et le point M étant en repos, ce point était sollicité par la force centrifuge χ' égale et contraire à la force centripète χ.

Ici la force centripète, nécessaire au mouvement circulaire du point M, n'est plus immédiatement agissante sur ce point; elle est remplacée par ses deux composantes F', F'', forces exercées sur lui par les fils. Ce corps exerce réciproquement sur les fils deux forces, dirigées suivant A'M et A''M, et qui, si elles étaient transportées en M, auraient pour résultante la force centrifuge χ' (*).

(*) Ces considérations seront généralisées au chap. 3 de la section III. En attendant, il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer qu'en appuyant la notion de la force centrifuge sur le principe de la réaction égale et contraire à l'action, nous suivons à cet égard une doctrine moderne enseignée par les savants professeurs de l'École polytechnique, et nous nous écartons du langage des auteurs de Mécanique du dix-huitième siècle.

On lit dans l'Exposition du système du monde de Laplace (liv. III, chap. 2) :

« Nous avons dans le mouvement circulaire l'exemple d'une force « agissant d'une manière continue. Le mouvement de la matière « abandonnée à elle-même étant uniforme et rectiligne, il est clair « qu'un corps mû sur une circonférence *tend sans cesse à s'éloigner « du centre par la tangente. L'effort* qu'il fait pour cela se nomme « FORCE CENTRIFUGE ; et l'on nomme FORCE CENTRALE OU CENTRIPÈTE « toute force dirigée vers un centre. Dans le mouvement circulaire, « la force centrale est égale et directement contraire à la force cen- « trifuge : elle tend sans cesse à rapprocher le corps du centre de la « circonférence. »

Il semblerait, d'après ces paroles, que, dans l'ordre naturel des idées, la force centrifuge dût être considérée avant la force centripète. Nous croyons le contraire. Si le corps qui se meut sur une circonférence était à un instant quelconque abandonné à lui-même, il s'échapperait au même instant suivant la tangente, et s'éloignerait par conséquent du centre, sans faire pour cela aucun effort. Pour le retenir sur la circonférence, une force centripète agissant sur lui est nécessaire, et nous venons d'apprendre à calculer son intensité. Mais un corps ne peut pas recevoir une ou plusieurs forces sans agir réci-

237. La force $\frac{mv^2}{r}$ centripète ou centrifuge peut se comparer au poids p du corps : en remplaçant m par $\frac{p}{g}$, l'équation [70] donne la proportion

$$\chi : p :: \frac{v^2}{2g} : \frac{r}{2},$$

dans laquelle $\frac{v^2}{2g}$ est la hauteur due à la vitesse v.

238. La quantité $\frac{mv^2}{r}$ prend d'autres formes :

1° Si T est le temps d'une révolution entière du mobile autour du centre, et si son mouvement est uniforme, on a

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad \text{d'où} \quad \chi = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2}. \qquad [71]$$

2° Si ω est la vitesse du point géométrique situé à un mètre de distance du centre O sur le rayon mobile OM, cette quantité, appelée *vitesse angulaire* du mobile M, satisfait à l'équation

$$v = \omega r, \quad \text{donc} \quad \chi = m\omega^2 r. \qquad [72]$$

239. *Extension de la théorie de la force centripète à un mouvement curviligne quelconque.*

Si la courbe décrite n'est pas un cercle, on pourra la considérer dans une très-petite étendue curviligne MM', comme située dans un plan qui contiendra la force centripète agissant sur le mobile à l'instant de son passage au point M. Cela posé, menons les deux normales aux points M, M', et appelons r la distance MO à laquelle elles se rencontrent. Les trois équations [67], [68] et [69] du n° 233 seront encore admissibles, sauf des erreurs qui tendront à s'évanouir à mesure que l'arc MM' sera plus petit. La seule différence consistera

proquement sur les corps qui les lui impriment : de là la force centrifuge qui est, si l'on veut, l'*effort* ou la résultante des efforts que le corps considéré fait sur ceux qui le retiennent à la circonférence décrite.

en ce que le rayon r, au lieu d'être constant, s'approchera d'une limite qui s'appelle le *rayon de courbure* de la courbe considérée au point M. (*Géom. anal.*, 260.) La formule de la force centripète [70] subsiste donc pour une trajectoire quelconque en donnant à r cette signification.

Ainsi à un instant quelconque du mouvement d'un point matériel, la résultante totale φ des forces qui le sollicitent, peut se décomposer en une force tangentielle $\psi = m\frac{dv}{dt}$ égale au produit de sa masse par son accélération actuelle, et en une force normale ou centripète $\chi = \frac{mv^2}{r}$ double de la puissance vive divisée par le rayon de courbure de la courbe actuellement décrite.

§ 7. *Applications de la théorie du mouvement circulaire.*

240. *Calcul approximatif de la force qui attire la lune vers la terre.*

Nous ferons abstraction du mouvement commun de la terre et de la lune autour du soleil. Bien que la distance de la lune à la terre soit variable et s'écarte jusqu'à environ $\frac{1}{15}$ en plus ou en moins de sa valeur moyenne qui est à peu près égale à 60 rayons terrestres, nous prendrons cette valeur moyenne pour distance constante, et nous appliquerons la théorie du mouvement circulaire uniforme en considérant la masse de la lune comme réunie à son centre.

Nous ferons usage de la formule [71] du n° 238, en y introduisant la durée de la révolution de la lune autour de la terre, qui est de 27 jours $\frac{322}{1000}$ ou 39344 minutes; ainsi

$$T = 39344 \times 60''.$$

En appelant R le rayon de la terre, on a $r = 60R$, et la formule [71] devient

$$\chi = m\,\frac{4\pi^2 . 60R}{(39344)^2 . (60)^2}.$$

On sait par la définition du *mètre* qu'on a

$$2\pi R = 40\,000\,000.$$

Substituant et achevant les calculs, on trouve

$$\chi = \frac{m}{369}.$$

Soit maintenant A la force que l'attraction terrestre exercerait sur la lune, si la masse de celle-ci était réunie en un point à la surface de la terre. L'accélération due à cette force serait, comme on le verra au chapitre suivant, un peu supérieure à 9,81; portons-la approximativement à 9,82. On aura ainsi $m = \frac{A}{9,82}$, d'où résulte $\chi = \frac{A}{3624}$, ou à peu près $\frac{A}{(60)^2}$. Ainsi les forces χ et A sont en raison inverse des carrés des distances r et R. Telle est l'origine de la loi de la gravitation découverte par Newton et étendue par lui à tous les corps de l'univers.

241. *Pendule conique*. Un fil AM (*fig.* 29), supposé rigide et inextensible, considéré néanmoins comme non pesant, est lié par une articulation à charnière au point A d'une verge verticale qui tourne sur elle-même. Ce fil porte en M un point matériel soumis à la pesanteur. A un instant où le fil forme avec la verticale AB un angle α, la tige et le fil ont une vitesse angulaire ω. On demande quelle doit être l'intensité de cette vitesse en fonction des côtés du triangle AMB, pour que le point M, sous la double action de la pesanteur et de la tension du fil, conserve sa vitesse horizontale, et, par conséquent, décrive indéfiniment le cercle horizontal dont le rayon est BM.

Nous ferons $BM = r$, $AB = h$, et $AM = l$. Le point M est sollicité par deux forces, l'une verticale, qui est son poids p ou mg; l'autre qui, exercée par le fil, ne peut avoir que la direction MA à cause de la liberté de l'articulation en A. (L'intensité de cette seconde force est la tension du fil.) Il faut (234) que leur résultante soit horizontale suivant MB et égale à $m\omega^2 r$. Ces trois forces sont proportionnelles aux côtés du triangle AMB qui leur sont parallèles (207). Ainsi, on a

$$m\omega^2 r : p \quad \text{ou} \quad mg :: r : h, \quad \text{d'où } \omega^2 = \frac{g}{h}, \quad \text{ou } \omega^2 = \frac{g}{l\cos\alpha}. \quad [73]$$

Si l'on veut introduire dans cette formule la durée T d'une révolution, on a

$$T = \frac{2\pi r}{\omega r} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos\alpha}{g}} = 2{,}006 \sqrt{l \cos\alpha}. \quad [74]$$

Remarques. 1° Tant que la verge verticale ne reçoit aucune force qui fasse varier sa vitesse, la rigidité du fil n'entre pour rien dans la conservation du mouvement de rotation du point M.

Mais si par une cause extérieure quelconque la vitesse angulaire de la verge change, le point M, en vertu de la rigidité du fil, participe à ce changement, et l'angle α tend à passer à une autre valeur qu'il peut prendre à cause de l'articulation à charnière.

2° Si l'on se donne ω et qu'on cherche l'angle α, on a $\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}$. Or $\cos\alpha$ doit toujours être < 1 ; de là résulte la condition $\omega^2 > \frac{g}{l}$ répondant à $T < 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, ou $T < 2{,}006\sqrt{l}$, qu'on déduit également de $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$.

3° Si le fil incliné CM (*fig.* 30), au lieu d'être articulé sur l'axe de la verge verticale AB, l'était au point C lié solidement à cette verge, les mêmes formules [73] et [74] subsisteraient en appelant l la longueur MA entre M et l'intersection de MC avec l'axe vertical de rotation.

242. Problème. *Une surface de révolution* AMB (fig. 31) *tourne uniformément autour de son axe* Ax, *qui est vertical ; une petite sphère pesante, que l'on pose en un point quelconque* M *du côté qui regarde l'axe, en lui imprimant le même mouvement de rotation, reste en repos relatif sur la surface, sans y être retenue par aucun frottement ; il s'agit de déterminer la forme de cette surface pour satisfaire à cette condition.*

Cette question rentre dans la précédente; la résistance normale de la surface suivant MN remplace la traction du fil. Ainsi la quantité h de la formule $\omega^2 = \frac{g}{h}$ devient la sousnormale PN. Sa valeur exprimée en fonction de la vitesse

angulaire ω est donc $\mathrm{PN} = \frac{g}{\omega^2} =$ constante ; propriété qui caractérise la parabole (*Géom. anal.*). Les triangles semblables NPM, MPT, donnent

$$\mathrm{PN} : \mathrm{PM} :: \mathrm{PM} : \mathrm{PT},$$

$$\text{d'où} \quad \mathrm{PN} = y \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{g}{\omega^2} \cdot dx = y dy;$$

et en intégrant, on a $y^2 = \frac{2g}{\omega^2} x$, équation d'une parabole.

On voit aisément que la surface de révolution dont il s'agit a la forme qu'affecte un liquide pesant dans un vase auquel on imprime un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical.

243. Problème. *Un point matériel pesant* M, *lié par deux fils* MA, MA′ (fig. 32) *à deux points fixes* A, A′, *décrit un cercle horizontal dont le rayon est* MB *ou* r, *avec une vitesse* v ; *on demande les tensions des fils* MA, MA′.

La force centripète χ ou $\frac{mv^2}{r}$ est la résultante de deux forces inconnues F, F′, et du poids p ou mg, force verticale. Désignons les angles BMA, BMA′ par α et α', et nous aurons (203)

$$\mathrm{F} \cos\alpha + \mathrm{F}' \cos\alpha' = \frac{mv^2}{r},$$

$$mg + \mathrm{F}' \sin\alpha' - \mathrm{F} \sin\alpha = 0,$$

deux équations du premier degré qui renferment la solution du problème. Si dans un cas particulier les données conduisaient à une valeur négative pour l'une des forces F, F′, par exemple, pour la force F′, cela signifierait que le fil correspondant pousserait le point M dans le sens A′M, et, par conséquent, devrait être rigide.

On obtiendrait les mêmes équations si l'on disait que les trois forces F, F′, p sont en équilibre avec la force centrifuge ; ce qui est évident, puisque cette dernière force est égale et opposée à la force centripète résultante de F, F′ et p.

244. *Mouvement circulaire d'un point pesant dans un plan vertical.* Un point matériel M (*fig.* 33) est assujetti à rester

à une distance constante r du point fixe O au moyen d'un fil OM ; quand il passe à la position culminante A, il possède une vitesse a; il est d'ailleurs sollicité par la pesanteur. Il s'agit de déterminer sa vitesse et la tension Q du fil dans une position quelconque M.

L'équation de l'effet du travail donne (216 et 222), en appelant x la distance AB de l'horizontale MB au-dessous de A,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}ma^2 = px \qquad \text{ou} \qquad v^2 = a^2 + 2gx,$$

attendu que la force Q, effort du fil sur M, dirigée suivant MO perpendiculairement au chemin décrit à chaque instant, ne produit point de travail (77).

Il faut que les composantes orthogonales suivant MO des des deux forces Q et p aient leur somme algébrique égale à $\frac{mv^2}{r}$, puisque cette somme est la force centripète (233).

On a donc, en appelant α l'angle MOA,

$$Q + p\cos\alpha = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{ou} \qquad Q + p\frac{r-x}{r} = \frac{pv^2}{gr}$$

ou, en mettant pour v^2 sa valeur $a^2 + 2gx$,

$$Q + p - \frac{px}{r} = \frac{pa^2}{gr} + \frac{2px}{r},$$

d'où

$$Q = p\left(\frac{a^2}{gr} + \frac{3x}{r} - 1\right). \qquad [75]$$

Cette équation, jointe à $v^2 = a^2 + 2gx$, résout la question proposée.

L'expression de Q fait voir que cette force peut être négative, c'est-à-dire, agir dans le sens OM, au lieu du sens MO que suppose le calcul. Dans ce cas, le fil devrait être rigide.

245. L'équation $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}ma^2 = px$, ou son équivalente $v^2 = a^2 + 2gx$, existerait dans le mouvement d'un point matériel soumis à l'action de la pesanteur, et assujetti d'ailleurs à se mouvoir sur une courbe quelconque qui ne lui opposerait qu'une résistance normale. Dans cette hypothèse, l'équation convient non-seulement aux positions du mobile M pendant sa descente, mais aussi à celles qu'il prend en remontant. Le

travail de la pesanteur, pendant l'ascension, est négatif, mais l'excès du travail positif, développé pendant la descente sur le travail négatif qui succède, est toujours px, en appelant x la distance variable du mobile au-dessous de l'horizontale passant par la position initiale. Si la courbe se compose de deux parties symétriques par rapport à un axe vertical, deux arcs élémentaires symétriques quelconques sont égaux et parcourus avec des vitesses égales; par conséquent, ils sont parcourus dans des temps égaux; la durée de l'ascension est donc alors égale à celle de la descente entre deux plans horizontaux quelconques.

246. Supposons qu'au lieu d'être attaché à un fil comme au n° 244, le mobile glisse sans frottement sur la surface convexe d'un cylindre de révolution dont l'axe est horizontal, sa vitesse initiale a au point culminant A étant dirigée tangentiellement au cercle AMC. Dans ce cas, le mobile ne peut rester sur la surface qu'autant que Q est négatif dans la formule [75] précédente. Il faut donc d'abord qu'on ait

$$\frac{a^2}{gr} < 1, \quad \text{ce qui revient à} \quad \frac{ma^2}{r} < p,$$

c'est-à-dire que le poids doit être plus grand que la force centrifuge correspondante à la vitesse initiale. Cette condition peut encore se mettre sous la forme

$$\frac{a^2}{2g} < \frac{r}{2},$$

c'est-à-dire que la hauteur due à la vitesse a doit être plus petite que la moitié du rayon, pour que le corps reste sur la surface à partir du point culminant A.

L'abscisse x du point où le mobile quittera la surface sera déterminée par l'équation

$$Q = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{a^2}{gr} + \frac{3x}{r} - 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{r}{3} - \frac{a^2}{3g}.$$

Si le corps devait glisser sur la surface concave du cylindre, il faudrait que Q fût positif dans la formule [75], et que, par conséquent, on eût $\frac{a^2}{2g} > \frac{r}{2}$.

§ 8. *Oscillations du pendule simple.*

247. Reprenant les données du n° 244, on suppose que le mobile parte sans vitesse initiale d'un point de la circonférence hors du diamètre vertical. Les considérations du n° 245 prouvent que si les hypothèses du problème étaient réalisables, le mobile ferait indéfiniment des oscillations égales en amplitude et durée. Dans l'expérience, la résistance de l'air et le frottement diminuent assez rapidement l'amplitude des oscillations si elle est grande; mais leur influence devient insensible quand l'amplitude est devenue très-petite, et l'on peut alors calculer la durée des oscillations en faisant abstraction de la matière du fil ou de la tige de suspension. Cette conception théorique constitue le *pendule simple;* le rayon de l'arc décrit par le point pesant est la *longueur* du pendule.

248. *Durée des petites oscillations du pendule* (fig. 34).

Lorsque le corps parti de A est arrivé en M, sa vitesse v est donnée par la formule

$$v = \sqrt{2gx},$$

déduite, comme au n° 244, de l'équation de l'effet du travail, en appelant x la projection BP de l'arc AM sur la verticale OC. Prenons, à partir de M, un arc infiniment petit MM' ou ds, parcouru dans le temps infiniment petit dt, nous aurons

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \text{et, par conséquent,} \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}}. \qquad [76]$$

Telle est l'expression du temps employé à parcourir l'arc infiniment petit ds, en fonction de la longueur de cet arc et de l'abscisse x ou BP.

Pour avoir la durée d'une demi-oscillation, c'est-à-dire du parcours de l'arc AC, il faut intégrer cette expression de dt, et d'abord remplacer ds par sa valeur en x et dx. Menons l'ordonnée M'P'; PP' est l'accroissement de x pendant le temps dt, ainsi $PP' = dx$. La relation cherchée entre ds et dx se reconnaît aisément dans la figure en menant le rayon

MO et la petite verticale M'N égale à dx. Le triangle infiniment petit MM'N rectangle et semblable à OMP donne, en appelant y l'ordonnée MP, et l le rayon MO,

$$\text{MM}':\text{M}'\text{N}::\text{MO}:\text{MP} \quad \text{ou} \quad ds:dx::l:y;$$

d'où
$$ds = \frac{l\,dx}{y}.$$

En substituant dans [76] cette valeur de ds, on a

$$dt = \frac{l}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{y\sqrt{x}},$$

formule dans laquelle il serait facile de remplacer y par sa valeur exacte en x et en quantités connues. Mais la fonction qu'on obtient ainsi n'étant pas de celles qu'on sait intégrer sous forme finie, on commence par la simplifier en remarquant que, lorsque l'arc AC est suffisamment petit, le rapport de l'ordonnée MP ou y à la corde MC diffère très-peu de l'unité, de sorte que si l'on écrit

$$y = \frac{\text{corde CM}}{\alpha},$$

α est un nombre variable, mais de très-peu supérieur à 1.

Maintenant la corde CM étant moyenne proportionnelle entre le diamètre $2l$ et le segment variable CP que nous désignerons par z, nous aurons

$$\text{CM} = \sqrt{2lz}, \qquad \text{d'où} \qquad y = \frac{1}{\alpha}\sqrt{2lz};$$

et par suite, en substituant cette valeur dans l'expression précédente de dt,

$$dt = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{xz}}. \qquad [77]$$

La somme des variables x et z est constante et égale à BC : désignons-la par $2b$, et par conséquent z par $2b - x$; nous aurons

$$dt = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{dx}{\sqrt{2bx - x^2}}.$$

Si, au lieu d'avoir égard à la variabilité de α, on remplace cette quantité par l'unité, ou au moins par une *constante*

moyenne entre les diverses valeurs qu'elle peut prendre, l'expression de dt devient alors facile à intégrer, soit par les formules connues du calcul intégral (note finale du n° 178), soit par la méthode géométrique indiquée, d'après M. Poncelet, au n° 178. En effet $\sqrt{xz}$ est égale à l'ordonnée PL d'une demi-circonférence construite sur BC comme diamètre; et si l'on désigne par $d\sigma$ l'arc LL' qu'interceptent sur cette demi-circonférence les horizontales MP, M'P', en menant la petite verticale LH égale à dx, et le rayon LI égal à b, on a deux triangles semblables LHL', LPI, qui donnent

$$PL : IL :: LH : LL', \quad \text{ou} \quad \sqrt{xz} : b : dx : d\sigma.$$

Tirant de là la valeur de $\sqrt{xz}$ et la substituant dans l'expression [77] de dt, on a

$$dt = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\sigma}{b}. \qquad [78]$$

Tel est le temps employé à parcourir le petit arc MM' ou ds compris entre les mêmes horizontales que $d\sigma$ ou LL'.

Si l'on considère α comme égal à 1, dont il diffère très-peu quand l'angle AOB est petit, on aura le temps total de la demi-oscillation en multipliant le facteur constant $\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{l}{g}}$ par la somme des petits arcs tels que LL', depuis B jusqu'à C, c'est-à-dire par la demi-circonférence BLC égale à πb; et en doublant le produit pour avoir la durée T de l'oscillation entière, on aura

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad [79]$$

Remarque. La descente de A en C, suivant l'arc de cercle, se fait dans le temps $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, tandis que suivant la corde elle exigerait (229) le temps $2\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Le rapport de ces deux durées est

$$\frac{1}{4}\pi = 0{,}785\ldots$$

249. A la rigueur, la valeur $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ du temps est un peu trop petite, puisqu'il faudrait multiplier chaque élément dont elle se compose par la valeur correspondante de α, variable un peu plus grande que l'unité. Pour apprécier l'erreur commise, on remarquera que la plus grande valeur de α répond à la position initiale A, et est égale à $\frac{CA}{AB}$ (*fig.* 35).

Soit β le rapport très-petit et supposé connu de la corde CA au rayon OA ou l. En abaissant sur CA l'apothème OK, on a deux triangles semblables ABC, COK (rectangles et ayant l'angle commun C), qui donnent

$$CA : AB :: l : OK.$$

Or on a $OK = \sqrt{l^2 - \left(\frac{1}{2}AC\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{1}{4}\beta^2 l^2}$;

donc $$\frac{CA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\beta^2}} = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{16} + \ldots}$$

Vu la petitesse de β, cette quantité diffère extrêmement peu de

$$\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{64}} \quad \text{ou de} \quad 1 + \frac{\beta^2}{8}:$$

tel est donc très-approximativement le maximum de α.

Le coefficient α de la formule [78] variant ainsi depuis $1 + \frac{\beta^2}{8}$ jusqu'à 1, on s'écartera très-peu de l'exactitude rigoureuse en substituant à cette variable une constante égale à la moyenne arithmétique de ses deux valeurs extrêmes, savoir, $1 + \frac{\beta^2}{16}$. Par suite, l'intégration de la formule [78] donne pour la durée d'une oscillation

$$T = \left(1 + \frac{\beta^2}{16}\right)\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Exemple.

$AC = 0{,}02l$; $\quad \beta = 0{,}02$; $\quad \frac{\beta^2}{16} = \frac{1}{4}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 0{,}000025$.

Cette valeur de β répond à une *amplitude d'oscillation* d'envi-

ron $2°,18'$. On appelle ainsi l'angle parcouru par le pendule dans une oscillation. Si elle était double de la valeur ci-dessus supposée, le terme de *correction* $\frac{\beta^2}{16}$ serait quadruplé.

250. La formule $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, applicable aux très-petites oscillations, montre, 1° que, pour un même pendule, ou pour deux pendules de même longueur, les oscillations très-petites sont *isochrones*, c'est-à-dire, de même durée, indépendamment de l'amplitude; 2° que, pour deux pendules différents, les durées des oscillations sont comme les racines quarrées des longueurs; 3° qu'on peut, à l'aide d'un pendule formé d'une petite sphère lourde, suspendue par un fil léger, mesurer approximativement l'accélération g due à la pesanteur, puisqu'on a $g = \frac{\pi^2 l}{T^2} = \frac{\pi^2 n^2 l}{\theta^2}$, en appelant n le nombre des oscillations qui ont lieu dans un temps θ. Et comme l'observation constate que le nombre $\frac{n}{\theta}$ d'oscillations par seconde est le même pour tous les pendules de même longueur, quelle que soit la nature du corps qui oscille, il est prouvé par là que l'accélération g est la même, dans un même lieu, pour tous les corps soumis à cette expérience.

Ces résultats théoriques deviendront complétement applicables quand on aura étudié (dans une autre section de ce cours) le mouvement du pendule composé.

251. La similitude des formules obtenues aux n°s 178, 241 et 248, donne lieu à un rapprochement remarquable.

Nous avons vu (185) que lorsqu'un point matériel dont la masse est m, est sollicité par une force fx proportionnelle à sa distance x à un point géométrique de la droite qu'il parcourt, son mouvement est oscillatoire, et la durée d'une oscillation double, c'est-à-dire, le temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs du mobile à la même extrémité de sa course, est $2\pi\sqrt{\frac{m}{f}}$.

Dans le pendule simple, le point se meut sur l'arc de cer-

cle qu'il parcourt, comme il se mouvrait sur une droite en vertu de la force tangentielle. Cette force, à l'instant où le mobile occupe la position M (*fig.* 34), est égale au poids mg multiplié par le cosinus de l'angle de la verticale avec la tangente en M; c'est donc mg sin MOC; et attendu que ce dernier angle est très-petit, on peut très-approximativement remplacer son sinus par le rapport de l'arc MC au rayon MO ou l. Si donc nous représentons l'arc MC par x, la force tangentielle se trouve exprimée par $\frac{mgx}{l}$; elle est donc de la forme fx, en posant $\frac{mq}{l}=f$, d'où $\frac{m}{f}=\frac{l}{g}$. En substituant cette valeur dans la formule générale $2\pi\sqrt{\frac{m}{f}}$ du n° 185, on trouve la durée d'une oscillation double égale à $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, comme l'a donnée le calcul direct au n° 248.

Dans le pendule conique (241), le point matériel décrit un cercle horizontal, sous l'action de deux forces, l'une verticale mg, poids de ce point; l'autre, tension du fil, dirigée vers le point d'attache fixe de ce fil. Ces deux forces ont leur résultante χ horizontale, dirigée du point matériel mobile vers le centre du cercle qu'il décrit. Cela posé, imaginons que, pendant le mouvement, ce point soit à chaque instant projeté sur un même diamètre ML du cercle (*fig.* 36). La projection N se meut (209) comme un point ayant la masse m, et sollicité par une force égale à la projection de χ sur ML. Or, cette projection est exprimée par $\frac{\chi x}{r}$, en appelant x la distance BN, et r le rayon BN' ou BM. Le mouvement oscillatoire de la projection N est donc celui qui aurait lieu en vertu d'une force de la forme fx, en posant $f=\frac{\chi}{r}$, d'où $\frac{m}{f}=\frac{mr}{\chi}$. La durée T d'une oscillation double est donc $2\pi\sqrt{\frac{mr}{\chi}}$. Maintenant rappelons-nous que les forces χ et mg

sont proportionnelles aux côtés MB, AB du triangle ABM; nous aurons ainsi

$$mg : \chi :: h : r, \text{ d'où } \frac{mr}{\chi} = \frac{h}{g}, \text{ et par suite } T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}};$$

comme on l'a trouvé plus directement au n° 241.

§ 9. *Du mouvement d'un point matériel pesant sur la cycloïde supposée sans frottement.*

252. Les propriétés singulières de ce mouvement ont beaucoup occupé les géomètres du dix-huitième siècle. Nous les exposerons succinctement, à cause de leur célébrité, quoiqu'elles soient sans application pratique.

Soit ABC (*fig.* 37) une cycloïde située dans un plan vertical; la base AC est horizontale; le sommet B est le point le plus bas. On suppose qu'un point pesant parti de la position H, descende sur la courbe sans frottement, de sorte qu'il soit seulement soumis à l'action de la pesanteur et à la réaction normale de la courbe. On demande la durée de la descente de ce mobile de H en B, durée qui est égale à celle de son ascension de B en H', sur la seconde moitié de la cycloïde, les points H et H' étant sur la même horizontale.

La vitesse du corps, à son passage en un point M de la courbe, sera $\sqrt{2gy}$, en appelant y la distance PI du point M au-dessous de l'horizontale HH' (244).

Représentons par s l'arc HM de la courbe, et soit ds, représentée par MM', l'arc infiniment petit parcouru pendant le temps dt. On a donc

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \quad \text{ou} \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}. \qquad [80]$$

Pour éliminer la variable s, menons l'horizontale MP et la petite verticale M'L, qui représentera la différentielle dy. Traçons la normale MN et la tangente MT, dont les intersections N, T, avec les horizontales AC, BT, seront aux extrémités du diamètre vertical NT du cercle générateur de

la cycloïde, passant par le point M. L'arc MM' pouvant être considéré comme se confondant avec la tangente M'T, les deux triangles semblables MM'L, MTQ, donnent la proportion MM' : LM' :: MT : TQ, ou en représentant TQ par z, et le diamètre TN par $2r$,

$$ds : dy :: \sqrt{2rz} : z, \quad \text{d'où} \quad ds = \sqrt{\frac{2r}{z}} \cdot dy; \qquad [81]$$

ce qui étant substitué dans [80], donne

$$dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{dy}{\sqrt{yz}}.$$

Cette équation étant semblable à la formule [77] du n° 248, quand on y fait $\alpha = 1$, et $l = 4r$, puisque y et z variables avec le temps, ont encore ici leur somme constante et égale à BI, il s'ensuit que l'intégration faite au n° 248 s'applique au cas actuel, et que par conséquent la durée d'une oscillation, c'est-à-dire, du parcours de H en H', sera [79]

$$T = \pi \sqrt{\frac{4r}{g}}, \qquad [82]$$

comme dans le pendule simple circulaire, avec cette différence que, pour la cycloïde, l'amplitude des oscillations peut embrasser une portion quelconque de la courbe, sans que leur durée change, tandis que la formule [79] suppose les oscillations très-petites. Cette propriété a fait donner à la cycloïde la qualification de courbe *tautochrone* (de même durée).

Lorsque les oscillations sur la cycloïde sont très-petites, on peut les regarder comme sensiblement circulaires, en remplaçant la courbe ABC par son cercle osculateur au point B. Or, on sait que le rayon de courbure en ce point est égal au double du diamètre (51); il faudrait donc, dans la formule [79] du n° 248, faire $l = 4r$, ce qui est conforme à ce que nous venons d'obtenir.

253. La formule [81] conduit à une relation remarquable entre la longueur de l'arc BM de la cycloïde et sa projection verticale BP. Soit $BM = s'$; MM' représente $-ds'$, et M'L

représente $-dz$. Faisant donc dans [81] $ds = -ds'$, et $dy = -dz$, on a

$$ds' = \sqrt{\frac{2r}{z}} . dz \quad \text{ou} \quad \sqrt{2r} . z^{\frac{1}{2}} dz;$$

et en intégrant depuis $z = 0$,

$$s' = 2\sqrt{2rz} \quad \text{ou} \quad s'^2 = 8rz.$$

Telle est la formule de la *rectification* de la cycloïde. Si l'on fait $z = 2r$, on a la longueur de la demi-cycloïde $BA = 4r$, double diamètre TN.

254. On a déjà vu (248, Remarque) que la descente d'un point pesant de A en C (*fig.* 34), suivant un arc de cercle dont la tangente en C est horizontale, est plus rapide que suivant la corde de cet arc. Mais quelle serait la courbe de la plus vite descente possible ? Telle est la question proposée, en 1696, par Jean Bernoulli. Voici, sauf quelques changements de rédaction, la solution donnée par Jacques Bernoulli, frère aîné de Jean (*Jacobi Bernoulli opera*, 1744, tome II, p. 769).

Soient M, M', M'' (*fig.* 38) trois points de la courbe cherchée, infiniment rapprochés entre eux. Soient y et y' les distances verticales des points M et M' à l'horizontale AC passant par le point de départ, sans vitesse initiale, du mobile.

Le temps de la descente de M en M'' sera, suivant la formule [80], exprimé par

$$\frac{MM'}{\sqrt{2gy}} + \frac{M'M''}{\sqrt{2gy'}}.$$

Ce temps doit être un minimum par rapport à tous les chemins qu'aurait pu suivre le mobile pour descendre de M en M''. S'il en est ainsi, il faut qu'en déplaçant horizontalement le point de passage M', d'une quantité M'L infiniment petite par rapport aux longueurs MM' et M'M'', le temps du parcours ne soit changé que d'une quantité infiniment petite par rapport à la somme ci-dessus posée. Or, la durée du parcours suivant MLM'' serait

$$\frac{ML}{\sqrt{2gy}} + \frac{LM''}{\sqrt{2gy'}};$$

donc, sauf une erreur relative qui diminue indéfiniment à mesure que L est plus rapproché de M′, on a l'égalité

$$\frac{MM'}{\sqrt{2gy}}+\frac{M'M''}{\sqrt{2gy'}}=\frac{ML}{\sqrt{2gy}}+\frac{LM''}{\sqrt{2gy'}}$$

ou

$$\frac{MM'-ML}{\sqrt{y}}=\frac{LM''-M'M''}{\sqrt{y'}}. \qquad [83]$$

Maintenant, menons LP perpendiculaire sur MM′, et M′Q perpendiculaire sur M″L. On peut, dans la dernière équation, mettre pour ML sa projection MP, qui n'en diffère que d'une quantité infiniment petite par rapport à LM′ (112); par la même raison, on peut substituer à M′M″ sa projection M″Q sur LM″. Le numérateur du premier membre de l'équation [83] devient ainsi M′P ou LM′. cos MM′N, et celui du second membre devient de même LQ ou LM′ cos M″M′N″. Donc, en supprimant le facteur commun LM′, cette équation se réduit à

$$\frac{\cos MM'N}{\sqrt{y}}=\frac{\cos M''M'N''}{\sqrt{y'}}. \qquad [84]$$

Cette relation conduit aisément à une équation différentielle de la courbe cherchée. Pour cela, les longueurs MM′, M′M″, étant deux éléments successifs de cette courbe, et les distances NM′, M′N″, étant leurs projections horizontales, posons

$$MM'=ds,\ M'M''=ds',\ NM'=dx,\ \text{et}\ M'N''=dx';$$

on en conclura

$$\cos MM'N=\frac{dx}{ds} \qquad \text{et} \qquad \cos M''M'N''=\frac{dx'}{ds'},$$

et l'équation [84] se transformera par conséquent en

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\sqrt{y'}}\frac{dx'}{ds'},$$

d'où il résulte évidemment que, pour un point quelconque de la courbe, la quantité $\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dx}{ds}$ est une constante.

Or, cette propriété caractérise la cycloïde dont l'origine A

(*fig.* 37) est au point de départ du mobile. En effet, pour un élément MM' quelconque, on a (même *fig.* 37) la proportion

$$\text{ML} : \text{MM}' :: \text{NQ} : \text{MN},$$

ou en mettant pour MN sa valeur $\sqrt{2r.\text{NQ}}$, puis représentant NQ par y, et supprimant le facteur commun $\sqrt{y}$,

$$dx : ds :: \sqrt{y} : \sqrt{2r},$$

d'où $$\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2r}} = \text{constante}.$$

Ainsi la *courbe de la plus vite descente*, ou *brachystochrone* de A en C, est une cycloïde dont l'origine est au point de départ A du mobile.

L'existence inévitable du frottement fait que cette propriété et celle du tautochronisme (252) ne peuvent pas être réalisées par l'expérience d'un corps glissant sur une surface cycloïdale. Il est vrai que, théoriquement, un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible oscille en décrivant une cycloïde, si l'autre extrémité du fil est fixée à l'origine commune D (*fig.* 37) de deux demi-cycloïdes DA, DC, égales à celles CB, AB, que l'on veut faire décrire, et placées de manière que le fil enveloppe alternativement chacune de ces courbes. Mais, en pratique, la masse du fil, sa roideur, son extensibilité, et la résistance de l'air altèrent les résultats de cette ingénieuse disposition imaginée par Huyghens.

On préfère au pendule cycloïdal le pendule circulaire, qui, comme le dit Laplace, est d'une précision suffisante, même pour l'astronomie.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL, RELATIVEMENT A UN SYSTÈME GÉOMÉTRIQUE SOLIDE QUI EST LUI-MÊME EN MOUVEMENT.

255. Reportons-nous aux considérations qui ont été précédemment exposées (n°s 34 et suivants) sur le mouvement d'un point matériel relativement à un système géométrique solide, qui est lui-même en mouvement; et imaginons qu'un observateur, entraîné à son insu dans le mouvement de ce système, considère un point qui se meut d'une manière quelconque, en vertu de sa vitesse initiale et de forces qui modifient à chaque instant son mouvement absolu dans l'espace.

Non-seulement cet observateur prendra pour la vitesse réelle du mobile ce qui ne sera que sa vitesse relative (37), mais encore il attribuera ce mouvement apparent à des forces en général différentes de celles qui agissent réellement. Si, par exemple, le système géométrique de comparaison tourne uniformément autour d'un axe fixe, et que le point observé soit immobile dans l'espace, ce point paraîtra décrire un cercle autour de l'axe fixe avec une vitesse uniforme, et, par conséquent, paraîtra sollicité par une résultante centripète constante (234), tandis que la résultante des forces qui peuvent agir sur ce point est absolument nulle. Cette remarque conduit aux questions traitées dans les deux paragraphes de ce chapitre.

§ 1er. *Des forces apparentes dans le cas où le système géométrique solide de comparaison a un mouvement de translation.*

256. Deux propositions préliminaires nous sont nécessaires.

1er Théorème. *Si plusieurs points matériels, possédant à un certain instant des vitesses égales parallèles et de même sens, sont, à partir de cet instant, sollicités par des forces parallèles*

de même sens et d'intensités proportionnelles aux masses des points auxquels elles s'appliquent, le système aura un mouvement de translation (44). C'est ce qu'il est facile de voir en se rendant compte de l'effet de chaque force sur le point qu'elle sollicite (208). Par exemple, divers corps qui seraient lancés simultanément dans le vide avec des vitesses initiales égales, parallèles et de même sens, puis abandonnés à l'action de la pesanteur, auraient un mouvement commun de translation.

257. 2ᵉ Théorème. *Si, à un instant initial, la vitesse d'un point matériel est la résultante de deux vitesses* u, w, *et que la force totale qui le sollicite soit la résultante de deux forces* F′ *et* F″, *supposées constantes pendant un temps* θ, *la corde* AM (fig. 39) *du chemin parcouru pendant ce temps par le mobile est la droite résultante des chemins rectilignes* $u\theta$, $w\theta$, $\frac{1}{2}\frac{F'}{m}\theta^2$, $\frac{1}{2}\frac{F''}{m}\theta^2$, *dus aux seules vitesses* u, w, *et aux seules forces* F′, F″; pourvu qu'on entende par droite résultante de plusieurs droites composantes, celle qu'on obtient en faisant sur ces dernières les mêmes constructions que s'il s'agissait de la résultante de forces représentées par ces droites.

En effet, soit v la vitesse initiale et absolue, résultante de u et de w, et soit R la force résultante de F′ et F″. La corde AM sera (208) la diagonale du parallélogramme construit sur AB égal à $v\theta$ et AC égal à $\frac{1}{2}\frac{R}{m}\theta^2$. Or on voit aisément que AB est la droite résultante de $u\theta$ et $w\theta$ (37), tandis que AC est celle de $\frac{1}{2}\frac{F'}{m}\theta$ et de $\frac{1}{2}\frac{F''}{m}\theta$ (200); d'où résulte le théorème énoncé, qui s'étend évidemment à autant de vitesses composantes et de forces qu'on voudra.

258. Passons maintenant à la question qui fait l'objet de ce paragraphe.

Problème. *Trouver la relation entre la résultante des forces réelles qui sollicitent un point matériel, et la force totale apparente qui convient à son mouvement relatif dans le cas où le système des axes géométriques a un mouvement de translation déterminé.*

Dans le cas particulier où le point matériel serait en repos relatif, et par conséquent entraîné dans le mouvement de translation des axes, il faudrait (256), 1° qu'à un instant considéré comme initial, il possédât une vitesse acquise égale à la vitesse commune de tous les points liés aux axes à cet instant ; 2° qu'à partir de cet instant, le point matériel fût réellement sollicité par une force capable d'imprimer à son mouvement acquis l'accélération et la courbure du mouvement commun (239). Cette force d'*entraînement*, constante ou variable suivant l'espèce de mouvement des axes, sera représentée dans ce qui suit par F_e.

Cela posé, revenons à la question proposée dans toute sa généralité.

Soit A (*fig.* 40) la position du mobile à l'instant considéré; soit V sa vitesse absolue décomposée en V_e, vitesse d'entraînement du système des axes, et V_r, vitesse relative actuelle du mobile (38). Soit F la force totale absolue (ou résultante des forces qui sollicitent réellement le point matériel), décomposée en deux, dont l'une soit la force d'entraînement F_e ci-dessus définie; l'autre composante, désignée par F_r, sera déterminée en intensité et en direction (207).

D'après le théorème du n° 257, on aura la position M du mobile après un temps θ (pendant lequel les forces F, F_e, F_r, sont supposées constantes) en construisant le polygone ABCDM, dont les côtés sont parallèles aux vitesses et aux forces composantes, et égaux aux quantités

$$V_e\theta, \quad \frac{1}{2}\frac{F_e}{m}\theta^2, \quad V_r\theta, \quad \frac{1}{2}\frac{F_r}{m}\theta^2.$$

Or, pendant ce temps, le point géométrique A, considéré comme lié aux axes, sera transporté en C, comme le serait un mobile de masse m en vertu de la vitesse initiale V_e et de la force F_e; et les axes du système, qu'on peut supposer menés par A à l'instant initial, seront transportés en C sans avoir changé de direction (puisque le mouvement des axes est un mouvement de translation). Donc le mobile paraîtra pour l'observateur emporté avec les axes s'être transporté de l'origine C en M en vertu de la vitesse initiale V_r et de la force F_r.

La force F_r est donc la force totale apparente qu'il fallait déterminer.

259. La force F_r relative ou force totale apparente dans le mouvement relatif, peut être considérée comme la résultante de la force totale existante F et d'une force $-F_e$ égale et opposée à la force de l'entraînement F_e. Ainsi, dans l'espèce de mouvement que nous supposons pour le système solide de comparaison, l'observateur dont nous avons parlé au n° 255, s'il connaît la résultante F des forces qui agissent réellement, sera obligé de la combiner avec la force $-F_e$ pour s'expliquer le mouvement du point considéré.

260. Remarques. Si le mouvement des axes de comparaison était rectiligne et uniforme, la force F_e serait nulle; le mouvement relatif ne différerait du mouvement absolu qu'à cause de la vitesse initiale. Si dans ce cas la force F était constante d'intensité et de direction, la parabole réellement décrite dans l'espace serait remplacée par une autre dont l'axe principal resterait parallèle à la force.

Si la force F était nulle, et par conséquent le point en repos ou en mouvement rectiligne uniforme, le mouvement des axes étant varié, la force apparente F_r se réduirait à $-F_e$.

§ 2. *Des forces apparentes dans le cas où les axes mobiles de comparaison ont un mouvement de rotation.*

261. Problème. *Déterminer la force apparente qui convient au mouvement relatif d'un point matériel lorsque le système mobile des axes de comparaison tourne uniformément autour d'une droite fixe.*

Soit ω la vitesse angulaire du système des axes de comparaison tournant autour de la droite projetée en O (*fig.* 41). Soit A la position initiale du mobile, r sa distance à la droite fixe O.

Dans le cas particulier où le point matériel serait en repos relatif, et par conséquent entraîné dans le mouvement de rotation autour de la droite O, il faudrait:

1° Qu'à l'instant considéré comme initial, il possédât une

vitesse acquise égale à ωr perpendiculairement au rayon AO, et dans le sens du mouvement du système;

2° Qu'il fût constamment sollicité par une force centripète $m\omega^2 r$ (238) qui serait la force d'*entraînement*.

262. Considérons maintenant le cas où le point matériel aurait un mouvement absolu rectiligne et uniforme, c'est-à-dire qu'à partir de l'instant initial, ce corps possédant une certaine vitesse précédemment acquise, ne recevrait plus l'action d'aucune force.

Soit V cette vitesse absolue, et supposons-la dirigée dans un plan perpendiculaire à la droite fixe O; ce plan sera celui de la figure. Décomposons V en deux vitesses, dont l'une V_e soit la vitesse d'entraînement dirigée suivant la tangente AB et égale à ωr; l'autre composante sera la vitesse relative V_r suivant une droite Ax.

Après un temps infiniment petit dt, le point matériel ayant parcouru l'espace rectiligne AM égal à Vdt, occupera la position M extrémité de la ligne brisée ABM, dont les côtés sont $AB = \omega r dt$ suivant V_e, et BM égal à $V_r dt$ parallèle à V_r.

263. Supposons qu'à l'instant initial, l'un des axes de comparaison soit Ax dirigé suivant V_r. Après le temps dt, l'origine A sera passée en A', l'arc AA' étant égal à $\omega r dt$ comme AB; et l'axe Ax aura pris la position $A'x'$, faisant avec le rayon A'O un angle $OA'x'$ égal à l'angle OAx, d'où il suit que les droites Ax, $A'x'$ font entre elles un angle égal à AOA' ou ωdt.

Pour un observateur emporté dans le mouvement de rotation des axes de comparaison, le point matériel paraîtra avoir décrit une courbe A'M tangente en A' à l'axe $A'x'$ en apparence immobile; car la vitesse initiale du mouvement relatif est dirigée suivant Ax devenu $A'x'$.

Prenons sur $A'x'$ une longueur A'M' égale à BM; traçons M'N égale et parallèle à A'B', et joignons N à M par l'arc de cercle NM ayant B pour centre. Nous aurons

$$A'M' = V_r dt.$$

Maintenant, d'après le théorème du n° 257, un observateur

qui considérera le transport du mobile de A' en M comme un mouvement absolu, le regardera comme produit par la vitesse initiale V_r qui seule lui ferait parcourir A'M', et par une force capable dans le temps dt de le transporter de M' en M, en partant du repos, ou par deux forces composantes dont l'une F' le transporterait de M' en N, et l'autre F'' de N en M. Ces forces devraient satisfaire aux équations

$$M'N = \frac{1}{2}\frac{F'}{m}\overline{dt}^2, \quad NM = \frac{1}{2}\frac{F''}{m}\overline{dt}^2.$$

Or, M'N égale à A'B peut être, sauf une erreur qu'on rendra aussi négligeable qu'on voudra (en prenant dt assez petit), égalée à la projection AP de BA' sur le rayon AO; d'où, en regardant l'arc AA' comme se confondant avec sa corde, on conclut

$$M'N = \frac{\overline{AA'}^2}{2r} = \frac{1}{2}\omega^2 r\overline{dt}^2.$$

D'autre part, la corde NM se confondant avec son arc, et les angles MBN, AOA', étant égaux, on a

$$NM : BM :: AA' : AO \quad \text{ou} \quad NM : V_r dt :: \omega r dt : r;$$

d'où
$$NM = V_r\omega\overline{dt}^2.$$

Ces deux expressions de M'N et de NM, substituées dans les deux équations précédentes, donnent les forces cherchées :

$$F' = m\omega^2 r = m\omega V_e, \quad \text{et} \quad F'' = 2m\omega V_r.$$

264. La résultante des forces F' et F'' est la force relative ou apparente cherchée.

La première F' est égale en intensité à la force centripète (238), capable de retenir le point mobile en repos apparent, pendant le mouvement de rotation des axes; mais elle lui est directement opposée, car la droite A'B fait avec le rayon A'O un angle aussi rapproché qu'on veut des deux droits. Cette force a donc l'intensité, la direction et le sens de la force centrifuge (235) due à la vitesse angulaire ω, à la masse m et à la distance variable r.

La seconde composante F'' ayant l'intensité $2m\omega V_r$ est, comme la corde NM, perpendiculaire à la direction $A'x'$ de la

vitesse relative, et en même temps perpendiculaire à l'axe de rotation O. Le sens de l'action de cette force est d'ailleurs, comme NM, opposé au sens de la rotation de la droite Ax dirigée suivant la vitesse apparente du point mobile.

265. Examinons maintenant le cas où la vitesse V n'est pas, comme nous l'avons supposé (262), perpendiculaire à l'axe de rotation O. Elle peut alors se décomposer en trois, la première V_e suivant AB, la seconde U_r dans le plan de la figure, perpendiculaire à l'axe fixe O, la troisième W_r parallèle à cet axe et se projetant en A (les deux vitesses U_r, W_r faisant un angle droit sont les composantes de la vitesse relative). Si la composante U_r est dirigée suivant Ax et a l'intensité représentée au n° 262 par V_r, le mouvement du point matériel ne différera du cas précédent qu'en ce que le point M de la figure sera la projection de ce mobile après le temps dt sur le plan OAx, plan dont le point matériel, en vertu de la vitesse W_r, sans l'intervention d'aucune force, se sera écarté de la quantité $W_r dt$. Donc les forces apparentes F' et F'' parallèles à ce plan seront encore les mêmes, c'est-à-dire exprimées par

$$F' = m\omega^2 r = m\omega V_e, \quad \text{et} \quad F'' = 2m\omega U_r. \qquad [85]$$

266. Enfin si le point matériel est sollicité par des forces réelles ayant une résultante F, son mouvement relatif paraîtra dû tout à la fois à la vitesse relative initiale, et à la force F prise à chaque instant dans sa véritable direction, et combinée avec les forces apparentes F' et F''. En effet, en comparant la position du mobile après le temps dt, dans ce cas, avec celle qui aurait lieu si la force F était nulle, on voit que la distance qui sépare ces deux positions est $\frac{1}{2}\frac{F}{m}(dt)^2$ dans la direction et le sens de la force F; or cette quantité étant infiniment petite par rapport à l'angle ωdt des axes Ax, A'x', il n'y a pas lieu, quant à l'effet de la force F, de tenir compte de la variation relative ou apparente de sa direction, pendant chaque petit intervalle de temps durant lequel cette direction est supposée constante dans l'espace absolu (1).

(*) La découverte de cette belle théorie appartient à Coriolis, qui

267. La théorie générale qui précède se vérifie aisément dans deux cas particuliers très-simples.

1° *Si le point matériel est en repos relatif* (261), la vitesse absolue est $V = \omega r$; la force existante est $F = m\omega^2 r$ dans le sens AO. La vitesse apparente U_r étant nulle, on a $F'' = 0$. Il ne reste donc que $F' = m\omega^2 r$ dans le sens opposé à AO à combiner avec la force F : la résultante apparente est nulle, ainsi que cela doit être.

2° *Si le point est en repos absolu*, la force F est nulle ; la vitesse relative est $\omega r = U_r$ dans le sens opposé au mouvement de rotation ; la force F'' devient $2m\omega^2 r$, et se trouve dirigée suivant AO ; de sorte qu'en composant cette force avec la force centrifuge F' égale à $m\omega^2 r$, on trouve pour force apparente définitive une force centripète $m\omega^2 r$, résultat évident *à priori*, puisque l'observateur emporté dans le mouvement de rotation des axes attribuerait au point matériel un mouvement circulaire avec la vitesse ωr.

268. La révolution annuelle de la terre autour du soleil est due à une vitesse initiale et à l'attraction que cet astre exerce continuellement sur toutes les parties de notre globe. Lorsqu'il s'agit des phénomènes mécaniques ordinaires, on peut considérer cette attraction comme produisant à chaque instant sur tous les points matériels du globe terrestre des forces parallèles et proportionnelles à leurs masses, d'où il suit (132) que l'on peut en faire abstraction sans rien changer aux mouvements relatifs que nous observons. On peut également supprimer par la pensée la vitesse acquise par le centre de la terre, laquelle vitesse est d'environ 30000 mètres par seconde ; car cela revient à composer chacune des vitesses réelles avec cette vitesse de 30000 mètres prise en sens contraire, ce qui ne change rien

---

l'a démontrée avec la généralité que comporte l'analyse infinitésimale. J'ai tâché d'en rendre la démonstration élémentaire en me bornant au seul cas utile dans la théorie des machines, celui du mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

Les recherches de Coriolis sur cette matière sont insérées dans le *Journal de l'École polytechnique*, cahiers XXI et XXIV.

au mouvement relatif; dès lors l'axe de la terre qui, en réalité, se meut à très-peu près parallèlement à lui-même, est considéré comme fixe, et la partie solide du globe forme un système tournant uniformément autour de cet axe.

La durée de chaque révolution accomplie dans ce mouvement de rotation s'appelle *jour sidéral*, et vaut 86164″, c'est-à-dire qu'elle est de 236″ plus courte que le jour moyen solaire. On a donc dans ce cas

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = \frac{3,1416}{43082} = 0,000073\ldots$$

d'où il suit que pour les vitesses V_r que nous avons l'occasion d'observer, la force F″ égale à $2m\omega U_r$ ou à $2\frac{p}{g}\omega U_r$ est ordinairement une fraction très-petite du poids p, et peut être négligée. Une expérience connue où son influence se manifeste, consiste à faire tomber un corps sphérique très-dense d'une grande hauteur sans lui imprimer aucune vitesse initiale; on sait qu'il tombe à une petite distance vers l'est du pied de la verticale du point de départ.

Si l'on néglige F″, il ne reste plus, pour obtenir la force totale apparente qui convient au mouvement relatif d'un point matériel, qu'à combiner les forces réelles avec la force centrifuge F′. Or c'est précisément ce que nous faisons lorsqu'au lieu de la force que la gravitation terrestre exerce sur un corps, nous substituons la force que nous appelons le poids de ce corps, qui n'est réellement que la résultante de la force attractive et de la force centrifuge.

Lorsque nous disons qu'un corps lancé dans le vide est abandonné à l'action de son poids, et descend de la hauteur $\frac{1}{2}gt^2$ dans le temps t, ce n'est qu'une double fiction qui répond à l'apparence du phénomène. En réalité (même en admettant la fixité de l'axe de la terre), quand un corps est abandonné dans le vide, la force qui s'exerce sur lui est plus grande que le poids du corps; mais aussi il parcourt en tombant un espace plus grand dans le sens vertical que celui que nous observons, puisque, pendant la durée de la chute, le point de

départ, considéré comme point géométrique, entraîné dans la rotation de la terre, descend lui-même d'une certaine quantité au-dessous du plan horizontal primitif. Les deux erreurs se compensent, comme nous l'avons annoncé d'avance, au n° 138.

Désormais nous continuerons d'employer, comme nous l'avons fait, le langage ordinaire qui suppose la terre fixe.

269. *Calcul de l'influence du mouvement de la terre sur la pesanteur.* Nous venons de voir que le poids d'un corps est la résultante de la force attractive de la terre et de la force centrifuge. Bornons-nous, pour simplifier, à considérer le cas où le corps est situé à l'équateur : les deux forces sont alors de sens opposés, et en désignant par A l'attraction terrestre sur le point dont la masse est m, et dont le poids à l'équateur est P, on a

$$P = A - m\omega^2 r,$$

r étant le rayon de l'équateur terrestre.

Or, premièrement, en désignant par T le jour sidéral 86164″, on a $\omega = \frac{2\pi}{T}$; secondement, on connaît la circonférence de la terre à l'équateur, savoir $2\pi r = 40070000$ mètres à moins d'un kilomètre près; troisièmement, l'expérience fait connaître (à l'aide du pendule) que l'accélération due à la pesanteur, à l'équateur, est de 9,78 mètres; et puisque, comme nous venons de le voir, on peut, sans erreur sensible, considérer les phénomènes de mouvement comme étant les mêmes qui s'accompliraient si, la pesanteur ne changeant pas, la terre était fixe, il est permis de poser $m = \frac{P}{9{,}78}$.

Substituant ces valeurs, on trouve la force centrifuge

$$m\omega^2 r = \frac{P}{9{,}78} \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{P}{9{,}78} \frac{40070000}{(86164)^2} \cdot 2\pi = \frac{P}{289};$$

donc $P = A - \frac{P}{289}$, d'où $P = \frac{289}{290} A = \left(1 - \frac{1}{290}\right) A$,

c'est-à-dire que la rotation de la terre fait que la pesanteur à l'équateur est diminuée de $\frac{1}{290}$ de ce qu'elle serait si notre globe n'avait qu'un mouvement de translation.

Remarque. 290 étant le quarré de 17,03, si la terre tournait

17,03 fois plus vite, la quantité $m\omega^2 r$ actuellement égale à $\frac{1}{290}$ A égalerait A, et le poids P à l'équateur serait nul.

270. Les formules finales du n° 265 ont des conséquences importantes dans la théorie générale de l'effet du travail des forces.

Si un point matériel considéré dans son mouvement relatif à un système tournant autour d'un axe, passe de la vitesse relative initiale V_r à une autre v_r, l'acccroissement

$$\frac{1}{2} m v_r^2 - \frac{1}{2} m V_r^2$$

de la puissance vive apparente sera égal au travail des forces réelles, plus au travail des forces F' et F'', calculé en considérant le mouvement relatif comme réel. Or la force F'' étant sans cesse perpendiculaire à la vitesse apparente, son travail est nul; tandis que le travail de la force centrifuge F' sans cesse dirigée en prolongement du rayon, est l'intégrale

$$\int_{r_0}^{r_1} m\omega^2 r dr \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} m\omega^2 (r_1^2 - r_0^2),$$

en supposant ω constante, et en désignant par r_0 et r_1 les distances initiale et finale du mobile à l'axe fixe de rotation.

Telle est la quantité qu'il faut ajouter au travail des forces réellement agissantes pour pouvoir appliquer le théorème de l'effet du travail à un point matériel, considéré dans son mouvement relatif à un système géométrique solide tournant autour d'un axe fixe.

271. Cette proposition, aussi utile que simple dans son énoncé, peut être démontrée directement comme il suit.

Supposons qu'un point matériel se transporte par la vitesse acquise V, sans l'action actuelle d'aucune force; que, par conséquent, son mouvement soit rectiligne et uniforme; supposons que ce mouvement soit rapporté à un système géométrique solide tournant autour de l'axe projeté en O avec une vitesse angulaire constante ω.

Soient A et M (*fig.* 42) les projections de deux positions du mobile; les distances AO et AM seront comme tout à l'heure désignées par r_0 et r_1. La vitesse V absolue dont la projection

a la direction AM peut se décomposer en deux : l'une U suivant AM, l'autre W perpendiculaire au plan de la figure.

Au point A, la vitesse apparente V_r, résultante de V et de ωr_0 prise en sens contraire du mouvement, peut s'obtenir en composant $-\omega r_0$ avec U, puis la résultante de ces deux vitesses avec W; d'où il suit qu'en appelant α l'angle de AM avec la tangente AB dans le sens de la rotation, on a

$$V_r^2 = U^2 + \omega^2 r_0^2 - 2U\omega r_0 \cos\alpha + W^2$$

ou

$$V_r^2 = V^2 + \omega^2 r_0^2 - 2U\omega k,$$

en désignant par k la perpendiculaire menée du centre O sur AM.

Au point M, la vitesse apparente v_r satisfait de même à l'équation

$$v_r^2 = V^2 + \omega^2 r_1^2 - 2U\omega k;$$

donc, en retranchant,

$$v_r^2 - V_r^2 = \omega^2(r_1^2 - r_0^2),$$

ou

$$\frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2}mV_r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(r_1^2 - r_0^2).$$

Il est clair que si le point était sollicité par des forces réelles, il faudrait ajouter leur travail au second membre de cette équation.

272. *Première application.* Un tuyau étroit, d'une forme quelconque, tourne uniformément autour d'un axe vertical. Un petit corps est introduit dans l'orifice supérieur A (*fig.* 43), ce qui exige qu'on lui imprime préalablement la vitesse que possède cet orifice; de plus on lui donne une vitesse initiale V_r relativement au tuyau. Soumis dès lors à l'action de la pesanteur et à la pression du tuyau, il descend en B. On demande en ce point sa vitesse relative v_r et sa vitesse absolue v dans l'espace, en supposant que le tuyau n'ait exercé aucun frottement, et que par conséquent son action sur le mobile ne produise aucun travail.

Soient les rayons horizontaux AA', BB', représentés par r_0, r_1; la hauteur A'B' par h.

1° Pour déterminer la vitesse relative v_r on a

$$\frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2}mV_r^2 = mgh + \frac{1}{2}m\omega^2(r_1^2 - r_0^2),$$

attendu que mgh est le travail dû à la pesanteur; d'où l'on tire

$$v_r^2 = V_r^2 + 2gh + \omega^2 (r_1^2 - r_0^2)$$

ou

$$v_r^2 = V_r^2 + 2gh + v_e^2 - V_e^2,$$

en appelant v_e et V_e les vitesses ωr_1 et ωr_0 des points B et A du tuyau.

2° La vitesse v est la résultante de v_r et de la vitesse v_e ou ωr_1 du point B, la direction de v_r étant celle de la tangente à l'extrémité B du tuyau, et la direction de ωr_1 étant perpendiculaire à AB′ dans le sens de la rotation.

273. *Deuxième application.* Une petite boule glisse le long d'une baguette horizontale très-mince qui la traverse et à laquelle on imprime un mouvement de rotation uniforme autour d'un de ses points. On demande de déterminer le mouvement de la boule en la considérant comme un point matériel et en négligeant son frottement sur la baguette.

Soit ω la vitesse angulaire constante de la baguette, x la distance de la boule à l'axe de rotation en un instant quelconque, x_0 cette distance en un instant initial, V et V_0 les vitesses de la boule relativement à la baguette aux mêmes instants.

On peut appliquer au mouvement relatif de la boule le long de la baguette l'équation de l'effet du travail, pourvu qu'on ajoute aux forces réelles une force centrifuge et par conséquent, dans la direction de la baguette, $F'' = m\omega^2 x$.

Les forces réelles, savoir, la pesanteur et la pression de la baguette, sont perpendiculaires au chemin relatif: leur travail dans le mouvement relatif est nul. L'équation se réduit donc à

$$V^2 - V_0^2 = \omega^2 x^2 - \omega^2 x_0^2.$$

Les quantités ωx et ωx_0 sont les vitesses absolues des points de la baguette qu'occupe le centre de la boule aux deux instants considérés. Si les données sont telles qu'à l'instant initial on ait $\omega x_0 = V_0$, on conclura de l'équation ci-dessus $V = \omega x$: la vitesse relative V et la vitesse d'entraînement ωx seront donc toujours égales; et, comme elles sont rectangulaires, il s'ensuit que la vitesse absolue à un instant quelconque fera avec la direction de la baguette au même instant un angle de 45°.

274. On peut demander la valeur de x après un temps quel-

conque t. En remplaçant V par $\frac{dx}{dt}$ dans l'équation $V = \omega x$ relative au cas particulier de $V_0 = \omega x_0$, on obtient $dt = \frac{dx}{\omega x}$, d'où, en intégrant (*Géom. anal.*),

$$t = \frac{2,3026}{\omega} \log \frac{x}{x_0};$$

donc x_0 ne peut pas être rigoureusement nulle.

Par exemple, soit $x_0 = 0^m,001$, $x = 1^m$ et $\omega = 1$, il vient

$$t = 3 \times 2,3026 = 6'',9078.$$

Si l'on part de l'équation générale $V^2 - V_0^2 = \omega^2 (x^2 - x_0^2)$ en y substituant $V = \frac{dx}{dt}$,

on trouve $$dt = \frac{dx}{\sqrt{\omega^2 x^2 + V_0^2 - \omega^2 x_0^2}},$$

et en intégrant (*Géom. anal.*, 291) depuis x_0 jusqu'à x,

$$t = \frac{2,3026}{\omega} \log \frac{\omega x + \sqrt{\omega^2 x^2 + V_0^2 - \omega^2 x_0^2}}{\omega x_0 + V_0}.$$

275. Pour obtenir l'équation de la trajectoire que décrit le centre de la boule dans son mouvement absolu, il suffit de remarquer que la baguette faisant, à la fin du temps t, l'angle mesuré par l'arc α avec sa direction initiale, on a $\alpha = \omega t$, d'où $t = \frac{\alpha}{\omega}$; et en égalant cette valeur à l'expression précédente de t obtenue en fonction de x, on aura l'équation cherchée en coordonnées polaires x et α.

TROISIÈME SECTION.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DU MOUVEMENT ET DE L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME MATÉRIEL, OU DYNAMIQUE ET STATIQUE DES CORPS QUELCONQUES.

CHAPITRE PREMIER.

DYNAMIQUE GÉNÉRALE OU THÉORÈMES SUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME MATÉRIEL QUELCONQUE.

§ 1. *Du principe de la réaction égale à l'action.*

276. L'extension de la théorie du mouvement d'un point matériel aux lois du mouvement des corps quelconques repose sur *le principe de la réaction égale et contraire à l'action* (235), dont il importe d'abord de préciser le sens.

Les corps sont des assemblages ou systèmes de points matériels. Un tel système en repos ou en mouvement est sollicité par deux espèces de forces. Les unes sont des forces *extérieures* dues soit à la pesanteur, soit au voisinage, quelquefois nommé contact, de corps ne faisant pas partie du système considéré. Les autres sont les *actions mutuelles* des points matériels du système : si l'un de ces éléments dont la masse est désignée par m' reçoit d'un autre ayant la masse m'' une force que nous représenterons par $f_{\prime\prime}^{\prime}$ (*), de même l'élément m'' reçoit de m' une force $f_{\prime}^{\prime\prime}$. Or le principe dont il s'agit consiste en ce que

1° Ces deux forces sont dans la direction qui joint les deux points ;

2° Elles ont la même intensité ;

(*) La notation $f_{\prime\prime}^{\prime}$ remplace les mots *force que* m' *reçoit de* m''.

3° Elles sont de sens opposés, toutes deux attractives ou toutes deux répulsives.

277. Sauf l'égalité des actions mutuelles, les lois de ces forces intérieures des systèmes matériels sont à peu près inconnues.

L'expérience de la dilatation et de la contraction que les changements de température produisent dans les corps, conduit à considérer ceux-ci comme composés d'atomes ou éléments indivisibles, groupés dans des proportions qui forment la constitution chimique, et séparés par des intervalles qui varient suivant la chaleur, suivant les forces extérieures, et suivant l'état de repos relatif ou de vibration.

Comme l'a expliqué M. Poncelet (*Mécaniq. Indust.*, p. 256 à 264), on se fait une idée assez plausible de la manière dont les éléments des corps agissent les uns sur les autres, au moyen d'une double hypothèse qui consiste à étendre aux moindres parties de la matière la loi de la gravitation universelle, de sorte qu'elles s'attirent davantage à mesure qu'elles sont plus rapprochées; et à admettre en même temps qu'il existe entre deux molécules voisines une force répulsive qui dépend de la chaleur ou d'autres causes analogues, et qui varie avec la distance, mais suivant une autre loi que la gravitation.

Ainsi les forces désignées par $f_{''}'$ et $f_{'}''$ seraient chacune la différence ou résultante de deux forces, savoir:

1° La gravitation mutuelle des deux éléments dont les masses sont m' et m'';

2° Leur répulsion mutuelle due aux causes analogues au calorique.

Cette résultante serait attractive, répulsive ou nulle, suivant que la première force serait supérieure, inférieure ou égale en intensité à la seconde.

278. Appliquons cette notion à deux points matériels que nous continuerons de désigner par les lettres m' et m''. Si nous supposons d'abord que ces deux petits corps soient en repos sans l'action d'aucune force extérieure, les forces mutuelles $f_{''}'$ et $f_{'}''$ sont nulles dans ce cas, ce qui n'empêche pas que la gravitation mutuelle des deux points et leur répulsion due au calorique ou à d'autres causes ne puissent être très-considéra-

bles par rapport aux masses m' et m'', si ces deux points sont suffisamment rapprochés.

Supposons maintenant que le repos des deux mêmes corps ait lieu sous l'action de deux forces extérieures F', F'', qui tendent soit à les rapprocher, soit à les écarter. Le point m' considéré seul ne peut se maintenir en repos que parce que, outre la force F' extérieure, c'est-à-dire venant d'un agent autre que le point m'', ce point m' reçoit du point m'' une force $f_{\prime\prime}'$ égale et contraire à F'. De même l'équilibre du point m'' exige que la force F'' soit égale et contraire à l'action moléculaire $f_{\prime}''$ ou force que m'' reçoit de m'. Cela posé, si l'on admet le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, c'est-à-dire, l'égalité d'intensité et l'opposition de direction des forces mutuelles $f_{\prime\prime}'$ et $f_{\prime}''$, on en conclura que F' et F'' sont nécessairement deux forces égales et opposées. Si l'on préférait regarder comme évident que l'équilibre de l'ensemble des deux éléments m', m'', exige l'égalité des forces opposées F', F'', on en conclurait l'égalité des forces mutuelles moléculaires. Lorsque les forces F', F'', tendent à rapprocher m' et m'', les forces mutuelles $f_{\prime\prime}'$ et $f_{\prime}''$ qui leur sont égales sont répulsives, ce qui signifie, dans l'hypothèse ci-dessus énoncée (277), que la gravitation est alors inférieure à la répulsion due aux causes analogues au calorique. Or, si l'on compare la situation relative des deux points à ce qu'elle était dans le premier cas d'équilibre, en l'absence des forces F' et F'', le second état s'explique en disant que, par le rapprochement des deux points m' et m'', leur gravitation mutuelle s'est à la vérité augmentée, mais que leur répulsion s'est augmentée davantage encore. Le contraire aurait lieu si les deux forces extérieures F', F'', tendaient à écarter les deux points. Il peut arriver qu'un très-petit changement dans la distance de deux points en produise un très-grand dans l'intensité de leur action mutuelle. On conçoit ainsi la constitution des corps solides dans lesquels les actions mutuelles variant fortement par suite de très-petits changements de forme, font que ces corps résistent dans certaines limites, sans déformation sensible, aux efforts qui tendent à les comprimer ou à les étendre.

279. S'il était possible qu'un assemblage de points matériels, formant un corps solide, en repos, fût parfaitement isolé, ne recevant l'action d'aucune force extérieure, il ne faudrait pas en conclure que, comme dans le premier cas du n° précédent, les actions mutuelles entre tous ces éléments seraient actuellement nulles. Le repos de chacun de ces points pourrait avoir lieu parce que les forces qu'il recevrait des autres parties du système seraient, les unes attractives, les autres répulsives, leur résultante étant nulle. Pour rendre cette observation sensible par un exemple très-simple, imaginons un système de quatre points matériels m', m'', m''', m^{iv} égaux et situés aux quatre sommets d'un quarré.

Pour que l'équilibre existe sans l'action d'aucune force extérieure, il suffit que la résultante des forces que chaque point reçoit des trois autres soit nulle; qu'ainsi les forces $f'_{''}$, f'_{iv} que le point m' reçoit des deux points m'', m^{iv}, dont il est le plus voisin, soient répulsives par suite de la supériorité de l'action du calorique sur celle de la gravitation; que, au contraire, la force $f'_{'''}$ dirigée suivant la diagonale soit attractive, c'est-à-dire qu'entre les deux points m', m''', la gravitation l'emporte sur la répulsion due au calorique.

Supposons maintenant qu'aux deux points m', m''', diagonalement opposés, soient appliquées deux forces extérieures F', F''', égales et contraires qui tendent à rapprocher ces deux points. Pour que le repos ait encore lieu dans cette hypothèse, il faut non-seulement que la diagonale $m'm'''$ soit plus petite que dans le premier cas, mais aussi que l'autre diagonale $m''m^{\text{iv}}$ soit augmentée; car le point m'', qui n'est soumis à aucune force extérieure, doit être encore en équilibre sous l'action des forces qu'il reçoit des trois points m', m''', m^{iv} : si la distance $m''m^{\text{iv}}$ restait la même, les forces répulsives totales entre m'' et m' d'une part, et entre m'' et m''' d'autre part, se trouveraient augmentées, parce que les distances $m''m'$, $m''m'''$ seraient moindres; l'angle $m'm''m'''$ serait d'ailleurs diminué; donc, par une double raison, la résultante de ces deux forces serait augmentée, tandis que la force attractive entre m'' et m^{iv} serait restée la même; l'équilibre

n'aurait par conséquent pas lieu ; donc, il faut, par compensation, que la diagonale $m''m^{\text{iv}}$ soit augmentée, ce qui diminue la plus grande et augmente la plus petite des forces inégales dont nous venons de parler.

La déformation contraire aurait lieu si les deux forces extérieures tendaient à écarter leurs deux points d'application m', m'''; les deux autres points m'', m^{iv}, devraient se rapprocher pour que le repos pût subsister. C'est ce que l'expérience confirme : un fil cylindrique qu'on allonge diminue en même temps de diamètre.

280. Les considérations hypothétiques qui viennent d'être exposées (nos 277 à 279) n'ont d'autre but que d'aider à se faire une idée de la manière dont les éléments matériels des corps agissent les uns sur les autres. Elles pourraient d'ailleurs être contestées sans porter atteinte aux vérités qui vont être établies dans cette section, et qui sont des conséquences nécessaires du seul principe de l'égalité de l'action et de la réaction contraire, joint aux théorèmes de la dynamique d'un point matériel.

Ces vérités s'appliquent aux corps quelconques, c'est-à-dire aux assemblages de points matériels quels qu'ils soient, sans excepter les corps organisés, ni même les animaux dont les éléments ont la propriété de l'inertie (81), aussi bien que les êtres du règne minéral, et ne modifient leur état de repos ou de mouvement qu'en vertu de forces, dont les unes sont *extérieures* aux corps que ces éléments composent, et les autres sont des forces *intérieures mutuelles*, dont la nature, déjà si mystérieuse dans les corps inorganisés, l'est encore plus dans les animaux. Il suffit à notre objet de dire que c'est dans les modifications de ces forces mutuelles que consiste l'action mécanique de la vie instinctive et de la volonté sur les éléments matériels des animaux.

281. Les théorèmes qui vont être établis dans les quatre paragraphes suivants s'appliquent à un système matériel quelconque, et plus ou moins déformable, tel que ceux qui nous sont offerts par la nature.

Si quelques-uns des éléments du système sont liés par des

fils ou des barres rigides, cette condition ne fait pas exception à la distinction de toutes les forces en deux espèces, les unes extérieures, les autres intérieures mutuelles. Il suffit de comprendre les liens dans le système matériel, en les considérant comme composés de points consécutifs entre lesquels agissent des forces mutuelles, sauf à négliger, s'il y a lieu, la masse de ces liens pour simplifier les calculs. Lorsque certains points du système se meuvent sur la surface d'un corps étranger au système, les réactions de cette surface, ou plutôt du corps qu'elle termine, sont des forces extérieures par rapport au système dont ce corps ne fait pas partie. Ces réactions seraient normales si la surface n'exerçait aucun frottement; mais cette hypothèse ne se réalise jamais lorsqu'un corps glisse sur un autre qui modifie son mouvement (*).

§ 2. *Théorème général relatif à la quantité de mouvement d'un système matériel.*

282. Soit un système de deux corps élémentaires en mouvement et agissant mutuellement l'un sur l'autre. Désignons ces deux corps, et particulièrement leurs masses par m' et m''. Le premier est sollicité par des forces extérieures dont nous désignerons la résultante par F'; une autre résultante extérieure F'' agit sur le second corps. En outre, soit que la dis-

(*) Carnot a dit (*Principes de l'équil. et du mouv.*, page 237): « Les « points fixes et obstacles quelconques sont des forces purement pas- « sives, qui peuvent absorber un mouvement si grand qu'il soit, « mais qui ne peuvent jamais en faire naître un, si petit qu'on veuille « l'imaginer, dans un corps en repos. » Nous n'insisterons pas sur ce qu'a de singulier aujourd'hui cette énonciation qu'*un point fixe est une force;* mais l'expression de *force passive* nous paraît une alliance de deux mots contradictoires, car la force qui empêche ou détruit un mouvement, agit ou est *active* aussi réellement que celle qui tend à produire ou qui a produit ce mouvement. Il suffirait, pour rendre la pensée de Carnot, de dire que la force qu'exerce un obstacle fixe est toujours résistante. C'est probablement à l'imitation de ce savant géomètre que plusieurs auteurs appellent *résistances passives* celles qui naissent du frottement, de la roideur des cordes, etc.

tance des deux points matériels varie ou reste constante, m' reçoit de m'' une force $f'_{\prime\prime}$, et m'' reçoit de m' une force $f''_{\prime}$ égale et de sens contraire. Soient v'_0, v''_0 les vitesses de m' et m'' à un instant initial, et v', v'' leurs vitesses après un temps t. Soient représentées par F'_x, F''_x, $f'_{\prime\prime x}$, $f''_{\prime x}$, v'_{0x}, v''_{0x}, v'_x, v''_x les projections de ces forces et de ces vitesses sur un axe quelconque Ox.

Chacun des corps m', m'', considéré à part, donne (211, 2°) une équation de l'effet de l'impulsion, soit que les forces varient ou restent constantes, savoir :

$$m'v'_x - m'v'_{0x} = \int F'_x dt + \int f'_{\prime\prime x} dt,$$

$$m''v''_x - m''v''_{0x} = \int F''_x dt + \int f''_{\prime x} dt.$$

Or $f'_{\prime\prime x}$ et $f''_{\prime x}$ sont à chaque instant les projections sur un même axe de deux forces égales et opposées, et sont, par conséquent, égales et de signes contraires; il en est de même des deux intégrales qui s'y rapportent; donc, en ajoutant les deux équations précédentes, on a

$$(m'v'_x + m''v''_x) - (m'v'_{0x} + m''v''_{0x}) = \int F'_x dt + \int F''_x dt,$$

résultat qui s'énonce en ces termes :

Théorème. *L'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées sur un axe quelconque est 1° égal à la somme des impulsions des forces extérieures projetées sur le même axe ; 2° indépendant des actions mutuelles.*

Cette proposition importante se démontrerait absolument de la même manière pour un nombre quelconque de points. Voici les équations à poser pour quatre points :

$$m'v'_x - mv'_{0x} = \int (F'_x + f'_{\prime\prime x} + f'_{\prime\prime\prime x} + f'_{\text{iv} x}) dt,$$

$$m''v''_x - mv''_{0x} = \int (F''_x + f''_{\prime x} + f''_{\prime\prime\prime x} + f''_{\text{iv} x}) dt,$$

$$m'''v'''_x - mv'''_{0x} = \int (F'''_x + f'''_{\prime x} + f'''_{\prime\prime x} + f'''_{\text{iv} x}) dt,$$

$$m^{\text{iv}}v^{\text{iv}}_x - m^{\text{iv}}v^{\text{iv}}_{0x} = \int (F^{\text{iv}}_x + f^{\text{iv}}_{\prime x} + f^{\text{iv}}_{\prime\prime x} + f^{\text{iv}}_{\prime\prime\prime x}) dt.$$

Les douze forces $f'_{''} f''_{'} f'_{'''} f'''_{'} f'_{\text{IV}} f^{\text{IV}}_{'} f''_{'''} f'''_{''}$, etc.,..... sont égales deux à deux et de sens opposés; leurs projections sont égales et de signes contraires; donc, en ajoutant, on a

$$\sum mv_x - \sum mv_{ox} = \sum \int_0^t \text{F}_x dt, \qquad [86]$$

équation qui s'énonce comme ci-dessus.

§ 3. *Théorème général du mouvement du centre de gravité d'un système matériel.*

283. Si u_0 est la vitesse du centre de gravité d'un système à un instant initial, et u ce que devient cette vitesse après le temps t, en conservant d'ailleurs les notations du n° 281, on a, d'après la propriété du centre de gravité démontrée au n° 102,

$$\sum mv_x = u_x \sum m, \quad \text{et} \quad \sum mv_{ox} = u_{ox} \sum m.$$

La formule [86] du numéro précédent donne donc

$$u_x \sum m - u_{ox} \sum m = \sum \int_0^t \text{F}_x dt. \qquad [87]$$

Cette équation ayant lieu pour un axe de projection quelconque, il s'ensuit que les modifications de la vitesse du centre de gravité en intensité et en direction ne dépendent ni de l'action mutuelle ni du rapprochement ou de l'écartement des points matériels du système. Enfin, si l'on compare l'équation [87] à la formule [57] du n° 211, applicable à un point matériel, on reconnaît l'exactitude de la proposition suivante:

THÉORÈME. *Le centre de gravité d'un système quelconque se meut comme un point matériel qui réunirait à lui seul la masse* $\sum$ m *des points du système, et qui serait sollicité par les forces extérieures transportées en ce point parallèlement à elles-mêmes.*

Cette proposition très-remarquable a été désignée sous le nom de *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité.* Ce n'est pas proprement un principe; c'est un théorème.

284. Les modifications du mouvement du centre de gravité

d'un corps ou d'un système de corps quelconque ne dépendant, comme nous venons de le voir, que de la résultante des forces extérieures fictivement transportées en ce point parallèlement à elles-mêmes, cette force fictive, dont la considération est très-utile, mérite un nom spécial : nous appellerons RÉSULTANTE DE TRANSLATION *de forces quelconques celle qu'on obtiendrait par la composition de ces forces, après les avoir transportées en un même point d'application, parallèlement à elles-mêmes, en conservant le sens de leur action.*

285. Il résulte de la propriété générale énoncée au n° 283, que la théorie générale du mouvement d'un point matériel sous l'action de forces quelconques (théorie qui a fait l'objet de la deuxième section de ces leçons), s'applique sans aucune exception au mouvement du centre de gravité de tout système matériel, pourvu que par la pensée on y concentre toute la masse et qu'on y transporte toutes les forces extérieures.

Ainsi la propriété de l'inertie (58) appartient à un système matériel quelconque, en ce sens que son centre de gravité ne peut ni se mettre en mouvement, s'il est actuellement en repos, ni changer actuellement, soit en grandeur, soit en direction, sa vitesse, s'il y en a une, à moins qu'une ou plusieurs forces extérieures n'agissent sur un ou plusieurs points du système. En l'absence de telles forces, le centre de gravité persiste, soit dans le repos, soit dans le mouvement rectiligne uniforme préalablement acquis, et les forces intérieures mutuelles n'ont d'autre effet que de changer la figure du système, s'il n'est pas solide, ou de produire des mouvements de rotation. C'est en cela que consiste ce qu'on a appelé la *conservation* du mouvement du centre de gravité.

La faculté locomotive chez les animaux ne fait pas exception à cette règle générale. La contraction des muscles résulte de forces mutuelles (280), qui seules ne pourraient mettre en mouvement le centre de gravité; la pesanteur ne pourrait que le faire descendre verticalement; mais la réaction des corps, sur lesquels les animaux s'appuient, produit des forces extérieures, et par suite le déplacement du centre de gravité dans tous les sens possibles.

Sur un plan horizontal parfaitement poli et sans frottement, c'est-à-dire, dont la réaction serait verticale (si l'on pouvait admettre l'existence d'un tel plan), un animal ferait de vains efforts pour changer l'état de repos ou de mouvement de son centre de gravité dans le sens horizontal (*).

(*) Carnot a dit (*Principes de l'équil. et du mouv.*, page 51) : « Nous « voyons, à la vérité, des êtres qui se meuvent spontanément; mais « c'est qu'ils ont en eux un principe vital dont on fait ici abstraction, « ou bien ils sont entraînés par des causes externes que l'expérience « apprend à connaître, comme la pesanteur. »

C'est la même pensée que d'Alembert exprimait en ces termes (*Discours préliminaire de son Traité de dynamique*, page xxv) : « L'expérience continuelle des mouvements de notre corps nous « prouve assez que la matière, soumise à la volonté d'un principe « pensant, peut s'écarter dans ses mouvements de ceux qu'elle aurait « véritablement si elle était abandonnée à elle-même. »

Nous ne devons pas supposer que ces auteurs aient voulu dire que nous pouvons mettre en mouvement notre centre de gravité sans l'intervention de forces extérieures, car ce serait une erreur. A la vérité, nous sommes maîtres de faire naître ces forces en nous appuyant sur les corps qui nous environnent; mais notre volonté ne développe en nous que des forces ou actions mutuelles.

Un profond géomètre disait dernièrement (*Compte rendu de l'Académie des sciences*, 14 juillet 1845) : « Il n'est pas en notre pouvoir « d'anéantir la pression verticale que le poids de notre corps exerce « contre le sol qui nous porte; mais nous pouvons faire naître à no- « tre gré la pression horizontale qu'exerce notre main contre un obs- « tacle qui nous barre le passage et que nous chassons devant nous, « contre un volet que nous fermons. Cette pression est une force phy- « sique dont nous disposons évidemment, et, dans la natation, dans « la marche, dans la course, de telles forces s'empressent, pour ainsi « dire, d'exécuter les ordres que dicte notre volonté. »

Pour prévenir de la part des élèves une interprétation inexacte de ces paroles, nous ferons deux observations : 1° quant à notre pression verticale sur le sol, même lorsque nous n'agissons verticalement sur aucun autre corps, elle est variable pendant que nous sommes en mouvement ; et si nous la désignons par P, c'est la pression

286. Voici divers exemples où le théorème du mouvement du centre de gravité a son application.

1° Si un projectile est lancé et fait explosion dans l'espace, tant que les éclats ne rencontrent pas d'autres corps, le centre de gravité poursuit sa course comme si ces éclats ne se fussent pas séparés, sauf l'effet des modifications que subit la résistance de l'air.

2° Si un homme s'agite en tombant d'un lieu élevé, son centre de gravité (point variable dans son corps suivant les diverses positions relatives de ses membres) décrit une courbe qui dépend de la vitesse initiale, de l'action de la pesanteur et de la résistance de l'air. Si cette résistance n'existait pas, la trajectoire du centre de gravité serait une verticale ou une parabole. Si, étant en l'air, cet homme lance horizontalement un corps qui tombait avec lui, l'endroit où il arrive au bas de sa chute peut être considérablement changé.

3° Lorsqu'un bateau à vapeur se meut uniformément, c'est que les diverses pressions exercées tant sur la carène que sur les aubes, se détruiraient si elles étaient transportées en un point parallèlement à elles-mêmes.

4° Un homme en repos sur un plan horizontal y exerce une pression verticale égale à son poids, car la réaction du plan et ce poids se détruiraient si elles étaient transportées au centre de gravité. Si cet homme saute, ou si, d'abord assis, il se lève, sa pression sur le plan augmente momentanément pendant tout le temps que le centre de gravité prend un mouvement accéléré ascendant. Le contraire a lieu si l'homme, d'abord debout, s'assied ou se baisse. Lorsque, sortant du repos, il se met en marche, la résultante de translation des pressions qu'il exerce sur le sol est oblique en arrière tant que son mouvement s'ac-

---

moyenne $\frac{1}{t}\int P dt$ qui est constante, étant prise entre deux instants où la vitesse verticale de notre centre de gravité est la même; 2° quand nous exerçons une pression horizontale sur un corps, il faut que nous en exercions une égale et opposée sur le sol ou sur un autre corps, si notre centre de gravité reste en repos.

célère; elle est oblique en avant lorsqu'il se retarde, s'arrête ou devient rétrograde.

5° Supposons qu'un vase placé sur l'un des plateaux d'une balance en équilibre contienne un liquide dans lequel soit suspendu un corps plus dense, à l'aide d'un fil attaché à la partie supérieure du vase. Si l'on coupe le fil, le corps descend d'un mouvement accéléré, et en même temps la pression sur le plateau diminue; si par suite de la résistance du liquide le corps plongé finissait par descendre d'un mouvement uniforme, alors la pression du vase sur le plateau serait la même que dans l'état de repos. A l'instant où le corps atteint le fond du vase et s'arrête ou rebondit, la pression supportée par le plateau augmente.

§ 4. *Théorème général de la puissance vive d'un système de points matériels.*

287. Reprenons les hypothèses et les notations du n° 282, et appliquons à chacune des masses m', m'', le théorème du n° 216.

Nous avons pour $m' \ldots \frac{1}{2} m'v'^2 - \frac{1}{2} m'v'^2_0 = \text{ℭ}F' + \text{ℭ}f''_{\prime}$,

pour $m'' \ldots \frac{1}{2} m''v''^2 - \frac{1}{2} m''v''^2_0 = \text{ℭ}F'' + \text{ℭ}f_{\prime}''$.

Donc, en ajoutant ces équations, et représentant par $\sum \text{ℭ}F$ le travail total des forces extérieures, par $\int fdl$ celui des deux actions mutuelles, qui, étant égales et directement opposées, donnent lieu à l'application du théorème du n° 114, nous avons

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 = \sum \text{ℭ}F + \int fdl,$$

c'est-à-dire, que *l'accroissement algébrique de la puissance vive du système est égal au travail des forces extérieures, plus à celui des forces intérieures mutuelles, ce dernier travail dépendant uniquement de l'intensité des actions mutuelles et du mouvement relatif des points du système.*

288. *Remarques.* Le travail des actions mutuelles est positif dans deux cas : 1° lorsque ces forces sont répulsives, et que les points s'éloignent ; 2° lorsque ces forces sont attractives, et que les points s'approchent. Il est négatif dans les deux autres cas.

Lorsque le second membre de l'équation précédente est négatif, c'est-à-dire, que le travail résistant l'emporte sur le travail moteur, cette équation n'en subsiste pas moins : dans ce cas, la puissance vive finale $\sum \frac{1}{2} mv^2$ est plus petite que la puissance vive initiale $\sum \frac{1}{2} mv_0^2$.

289. La proposition du n° 287 s'étend facilement à un système d'un nombre quelconque de points matériels.

Par exemple, dans le cas de quatre points dont les masses seraient m', m'', m''', m^{iv}, on posera quatre équations comme celle-ci :

$$\frac{1}{2} m'v'^2 - \frac{1}{2} m'v_0'^2 = \text{ᘓ}F' + \text{ᘓ}f_{\prime\prime}' + \text{ᘓ}f_{\prime\prime\prime}' + \text{ᘓ}f_{\text{iv}},$$

et en les ajoutant, on aura au premier membre l'accroissement de la puissance vive totale $\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2$; les premiers termes des seconds membres donneront la somme de travail des forces extérieures, désignée par $\sum \text{ᘓ}F$; enfin, les douze travaux des actions mutuelles se réuniront en six groupes binaires,

$$\text{ᘓ}f_{\prime\prime}' + \text{ᘓ}f_{\prime}'', \quad \text{ᘓ}f_{\prime\prime\prime}' + \text{ᘓ}f_{\prime}''', \text{ etc.},$$

dont chacun se réduira (114) à un terme de la forme $\int fdl$; et en représentant leur somme par $\sum \int fdl$, on aura définitivement l'équation

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 = \sum \text{ᘓ}.F + \sum \int fdl, \qquad [88]$$

qui existe, quel que soit le nombre des points matériels du système. Ce nombre étant n, il y a n termes dans chacune des sommes du premier membre, à moins que quelques

points ne soient en repos; il y a n termes dans la somme de travail des forces extérieures $\sum \mathfrak{T}F$, à moins que certains points ne soient en repos ou qu'ils ne soient sollicités seulement par les actions mutuelles, ce qui ne peut avoir lieu que lorsqu'on fait abstraction de la pesanteur dont l'action pénètre toutes les parties des corps; il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ termes dans l'expression du travail des actions mutuelles $\sum \int fdl$, si chaque point sollicite tous les autres; si, au contraire, certains points n'exercent aucune action sur certains autres, pour ces points indifférents deux à deux, la valeur de f est nulle, ainsi que son travail $\int fdl$.

290. Une remarque fort importante, c'est que, dans les cas ordinaires que présente la nature, les intensités des forces mutuelles représentées ci-dessus par f, ne dépendent pas du mouvement absolu du système, mais seulement du mouvement de ses divers éléments les uns par rapport aux autres; il en est par conséquent de même des intégrales $\int fdl$. On peut donc énoncer en ces termes l'équation [88] obtenue au numéro précédent:

Théorème. *L'accroissement de la puissance vive d'un système matériel, entre deux situations quelconques, est égal au travail des forces extérieures entre ces deux situations, plus à celui des actions mutuelles, ce dernier dépendant uniquement de la nature du système et du mouvement relatif de ses parties.*

Tel est le *théorème général de la puissance vive d'un système matériel ou théorème de l'effet du travail*, l'une des propositions de la mécanique rationnelle les plus fécondes en déductions utiles.

291. Le cas le plus simple où le théorème général de l'effet du travail trouve son application est celui où le système considéré est supposé rigoureusement solide, ce qui, comme on l'a vu à la fin du n° 278, est admissible pour les corps rigides soumis à des forces modérées. Il résulte de cette hypothèse

que le travail total des actions mutuelles $\sum \int fdl$ est nul, parce que tous les facteurs dl le sont. On a donc alors l'équation

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 = \sum \mathfrak{E}F, \qquad [89]$$

dans laquelle $\sum \frac{1}{2} m^2 v$ et $\sum \frac{1}{2} mv_0^2$ sont les sommes des puissances vives finale et initiale, de tous les points du système, et $\sum \mathfrak{E}F$ est la somme algébrique des travaux de toutes les forces extérieures pendant tout le temps considéré.

292. Un autre cas où l'équation [89] subsiste encore, est celui où le système est considéré comme composé de corps qui glissent les uns sur les autres sans compression ni frottement, et qui cessent d'agir mutuellement dès qu'ils s'écartent, de sorte que dans leurs mouvements il ne résulte de leurs actions mutuelles que des travaux qui se détruisent. L'expérience prouve que les liquides qui ne subissent pas de changements trop brusques de vitesse sont à peu près dans ce cas.

293. Si à deux instants du mouvement d'un système, solide ou autre, auquel s'applique la supposition $\sum \int fdl = 0$, la somme des puissances vives est la même, si, par exemple, toutes les vitesses après avoir varié redeviennent les mêmes, la somme algébrique du travail des forces extérieures est nulle : le travail résistant est égal au travail moteur.

294. Si, à partir d'un certain instant, tout travail positif ou moteur cesse, et que le travail négatif ou résistant exercé pendant un certain temps ait une valeur absolue représentée par $\mathfrak{E}_r$, de sorte qu'on ait $\sum \mathfrak{E}F = -\mathfrak{E}_r$, si de plus ce travail résistant, qui fait sans cesse décroître la somme de puissance vive, devient assez considérable pour détruire toutes les vitesses du système, on a $\sum \frac{1}{2} mv^2 = 0$, et l'équation du n° 269 se réduit à $\sum \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathfrak{E}_r$, c'est-à-dire que le travail résistant que le système était capable de supporter à partir de

l'instant où les diverses masses m', m''..... qui le composent étaient animées des vitesses v'_0, v''_0,..... est numériquement égal à la somme $\frac{1}{2}m'v'^2_0 + \frac{1}{2}m''v''^2_0 + \ldots\ldots$ représentée en abrégé par $\sum \frac{1}{2} m v_0^2$. Or, d'après le principe de l'égalité de toute action et de la réaction opposée, le système matériel considéré ne peut pas recevoir l'action des forces résistantes extérieures F, sans exercer, sur les corps à la présence desquels ces forces sont dues, des forces égales et de sens opposé; et si l'on suppose que ces corps soient et restent au contact sans variation de distance avec le système solide dont il s'agit, le travail résistant $\mathfrak{T}_r$ sera (117) numériquement égal au travail moteur que les corps extérieurs auront, dans le même temps, reçu du système. A ce point de vue, la quantité $\sum \frac{1}{2} m v_0^2$, moitié de ce que plusieurs auteurs appellent la somme des *forces vives* (170) de ce système, à l'instant où existent les vitesses v_0, est l'expression numérique de ce qu'on peut appeler la *capacité de travail* qu'il possède en vertu des seules vitesses des masses qui le composent (indépendamment du travail que peuvent développer ou absorber les actions mutuelles des molécules, quand le système change de forme); et c'est ce que signifie pour nous l'expression abrégée de *puissance vive*, le premier mot étant pris dans le sens de *capacité de travail*, et le second répondant à l'idée de *vitesse* unie à une masse.

§ 5. *Du mouvement de corps quelconques relativement à un système géométrique solide et mobile.*

295. Si un système quelconque de points matériels est considéré dans son mouvement relatif à des axes formant un assemblage solide mais mobile, il résulte de la théorie exposée au chapitre 3 de la 2ᵉ section (nº 255 et suiv.), qu'on peut traiter le mouvement relatif de chaque point comme un mouvement absolu, pourvu que, prenant pour vitesse initiale sa vitesse relative, telle qu'elle a lieu à un certain instant, on

joigne une force fictive aux forces réelles qui, à partir de cet instant, sollicitent le point considéré.

Quand il s'agit d'un système dont les éléments agissent les uns sur les autres, les forces réelles se distinguent (276) en forces extérieures et en forces intérieures mutuelles; l'intensité et le travail de ces dernières ne dépendent que des distances entre les points matériels du système (290); donc, pour appliquer à ce système dans son mouvement relatif à des axes mobiles les propriétés générales établies dans les paragraphes précédents, il faut ajouter pour chaque point aux forces extérieures réelles la force fictive propre à ce point et considérer d'ailleurs les forces mutuelles comme si le mouvement relatif était un mouvement absolu.

296. Lorsque le mouvement des axes de comparaison est un mouvement de translation, il faut à tout point du système appliquer en outre de la force réelle qui lui appartient, la force fictive $-F_e$, égale et opposée à chaque instant à la force d'entraînement (259). Si, à l'instant considéré, v_e est la vitesse commune à tous les points des axes, $\frac{dv_e}{dt}$ leur accélération, ρ le rayon de courbure des courbes égales qu'ils décrivent, la force $-F_e$, pour le point dont la masse est m, est la résultante, 1° d'une force tangentielle $-m\frac{dv_e}{dt}$ dirigée en sens contraire de l'accélération $\frac{dv_e}{dt}$; 2° d'une force centrifuge $\frac{mv_e^2}{\rho}$. Lorsque le mouvement de translation des axes est rectiligne, cette deuxième force est nulle : le rayon ρ est infini.

Exemple. Lorsque des voyageurs sont dans un bateau ou dans une voiture dont le mouvement est sensiblement uniforme, quelque rapide qu'il soit, les mouvements de ces voyageurs et des corps transportés avec eux ont lieu, par rapport au véhicule, comme si celui-ci était en repos. Si, par l'effet d'une force qui n'agit pas sur les corps transportés, le véhicule prend un mouvement plus rapide, dont l'accélération soit $\frac{dv}{dt}$, tous ces corps semblent sollicités par une force $m\frac{dv}{dt}$ en

sens opposé. Le contraire a lieu si la voiture ou le bateau se ralentit : les corps transportés semblent poussés en avant, chacun par une force $m\frac{dv}{dt}$ proportionnelle à sa masse et à l'accélération négative du véhicule.

297. Si les axes de comparaison tournent uniformément autour d'une droite fixe, la force fictive à introduire, en outre des forces réelles, pour chaque point, sera la résultante des deux forces calculées au n° 265, savoir, la force centrifuge $F' = m\omega^2 r$, et la force normale à la vitesse relative $F'' = 2m\omega U_r$.

Mais quand on se proposera seulement d'appliquer le théorème général de l'effet du travail, la force F″ disparaîtra, attendu que son travail est nul (270). L'étude de l'hydraulique présentera des applications très-utiles de cette remarque.

§ 6. *Notions élémentaires sur le choc des corps.*

1° Généralités. Vitesse du centre de gravité.

298. Les corps solides, tels que la nature nous les présente, ne possèdent ni la continuité ni l'invariabilité de figure que suppose la géométrie dans les corps qu'elle considère : un corps solide est réellement composé d'éléments matériels distincts, liés entre eux par des forces naturelles, qui, variant considérablement d'intensité par suite de très-faibles variations dans leurs distances relatives, s'opposent jusqu'à certaines limites à la rupture du système, et ne permettent même que des déformations souvent insensibles sous l'action de forces extérieures qui tendent à imprimer à ses parties des mouvements divers.

299. Imaginons que deux corps solides se meuvent séparément en vertu de leurs vitesses acquises et sous l'action de forces telles que la pesanteur, la pression des fluides ou l'effort d'un moteur animé. Tant que ces corps ne seront pas très-rapprochés l'un de l'autre, leur attraction ou leur répulsion mutuelle sera très-faible; supposons qu'on la néglige. Dans cette hypothèse, il peut arriver qu'en vertu des causes de mouvement, propres à chaque corps, deux points matériels

différents, pris sur l'un et sur l'autre, tendent à passer en même temps en un même lieu avec des vitesses différentes en intensité ou en direction, ou tout à la fois en intensité et direction. Or, cela est impossible; on dit ordinairement que l'*impénétrabilité* de la matière s'y oppose, et que par conséquent les vitesses des deux points considérés sont brusquement modifiées dès que les deux points arrivent au contact. Mais on a une idée plus complète de ce fait lorsque l'on considère que les deux points en question, dès qu'ils sont très-voisins, exercent entre eux une action mutuelle qui, par suite de leur rapprochement, finit toujours par devenir répulsive, et par acquérir l'intensité nécessaire pour satisfaire à la loi de l'impénétrabilité.

300. Le phénomène dont nous venons de parler constitue ce qu'on appelle le *choc* ou *la collision* de deux corps solides.

La notion des forces qui se manifestent dans le choc des corps nous est très-familière : elle nous est acquise par l'expérience de tous les instants, ces forces étant analogues aux pressions qui naissent de notre contact avec les corps qui nous environnent. Au contraire, il a fallu des observations délicates et un génie sublime pour arriver à généraliser le principe de l'attraction mutuelle des corps, et lorsque la gravitation universelle a été incontestablement établie comme un fait, il a dû s'élever parmi les philosophes la question de savoir comment cette force pouvait se produire. Les uns ont dit que la nature de cette attraction nous était entièrement inconnue; d'autres pensant qu'il ne peut y avoir de forces que celles qui s'exercent entre des corps qui se touchent, ont imaginé que l'attraction était produite par la pression de l'éther, matière subtile qui remplissait tout l'espace. La discussion de ces diverses opinions n'a mené à aucun résultat utile. Pour nous, l'attraction et la répulsion de la matière pondérable sont des forces qui toutes deux s'exercent *à distance*, attendu que lorsque nous disons que deux corps se touchent, nous n'entendons pas qu'il y ait entre eux un contact géométrique rendant impossible tout rapprochement ultérieur, mais nous voulons dire qu'ils sont assez près l'un de l'autre pour que leur répulsion

mutuelle devienne sensible et modifie le mouvement de ces corps.

Quant au principe en vertu duquel ces forces s'exercent, il n'est guère mieux connu pour la répulsion que pour l'attraction, et il est d'ailleurs indifférent dans l'étude de la Mécanique et dans ses applications. Ce qui importe, c'est la connaissance des lois de ces forces; et la première de ces lois, celle de l'égalité de l'action et de la réaction opposée, permet déjà de tirer des conséquences utiles, notamment dans la question du choc des corps.

301. L'égalité de l'action et de la réaction a conduit au théorème général du mouvement du centre de gravité (283). Il en résulte que pendant le choc, ou en général pendant l'action mutuelle de deux corps, le mouvement du centre de gravité du système de ces deux corps ne dépend que des forces extérieures agissant sur ce système. Si, par exemple, ces forces sont nulles, ce qui revient à supposer les deux corps libres dans l'espace, et à négliger, au moins pendant la très-courte durée du choc, l'effet de la pesanteur, le mouvement du centre de gravité du système sera rectiligne et uniforme pendant tout cet intervalle de temps.

302. Soient M, M′, les masses des deux corps séparés; v, v' les vitesses de leurs centres de gravité immédiatement avant le choc; u la vitesse du centre de gravité du système des deux corps.

En vertu du théorème du n° 102, on aura, en projetant les vitesses sur trois axes, les trois équations

$$\left.\begin{array}{l}(M + M')u_x = Mv_x + M'v'_x;\\ (M + M')u_y = Mv_y + M'v'_y;\\ (M + M')u_z = Mv_z + M'v'_z;\end{array}\right\} \quad [90]$$

d'où l'on tirera u_x, u_y, u_z, et, par conséquent, u et ses angles avec les axes.

Et en vertu du théorème du n° 283, la vitesse u restera constante, puisque les forces extérieures au système des deux corps sont supposées nulles; tandis que les vitesses des centres de gravité des deux corps distincts, au lieu de conserver

leurs valeurs v et v', subiront des variations qui dépendront des actions mutuelles pendant le choc.

303. On sait que Mv s'appelle la quantité du mouvement de la masse M; rien n'empêche de la représenter par une ligne droite, et de lui attribuer la même direction qu'à la vitesse v. D'après cette convention, Mv_x ou $Mv \cos(v, x)$ sera la projection de la droite représentative de Mv, sur l'axe des x. De même, le produit $(M + M')\, u_x$ sera la projection de la droite représentant la quantité de mouvement de la masse totale $M + M'$ considérée comme concentrée en son centre de gravité.

Cela posé, les trois équations ci-dessus expriment que si par un point de l'espace on imagine deux droites représentant, pour l'intensité et la direction, les quantités Mv, $M'v'$, la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites représentera de la même manière la quantité $(M + M')\, u$, constante depuis le commencement jusqu'à la fin du choc.

On voit ainsi que le centre de gravité de l'ensemble $M + M'$ se meut dans un plan parallèle à la fois aux deux vitesses v, v', des centres de gravité des masses M, M' avant le choc. C'est ce que prouveraient également les équations [90] du n° 302 : en prenant l'axe des z perpendiculaire à la fois aux vitesses v, v', on aurait $v_z = 0$, $v'_z = 0$, d'où $u_z = 0$.

304. Il peut arriver que les deux corps restent unis après le choc; l'action mutuelle des deux corps est alors dite non élastique, et c'est à ce cas que s'appliquent le plus ordinairement les formules précédentes et la construction géométrique correspondante. Mais si, après le choc, les corps se séparent, les mêmes équations et la même construction appartiennent encore au mouvement uniforme du centre de gravité du système des deux corps, point qui, à chaque instant, divise en parties réciproquement proportionnelles aux deux masses M, M', la droite joignant les deux centres de gravité individuels des deux corps. Seulement, dans ce second cas, le mouvement propre à chaque corps, qu'il peut être important de déterminer, reste inconnu tant qu'on ignore les lois des actions mutuelles exercées pendant le choc.

2° Choc direct de deux corps.

305. Faisons une application des généralités précédentes au cas le plus simple, celui où les centres de gravité des deux corps avant le choc se meuvent sur la même ligne droite. Le centre de gravité de l'ensemble des deux corps restera alors sur cette ligne en y conservant le même mouvement malgré le choc. Si les deux corps sont symétriques par rapport à l'axe qui contient leurs centres de gravité, et n'ont chacun qu'un mouvement de translation, alors v sera la vitesse avant le choc de tous les points du premier corps, v' celle de tous les points du second. Dès que le choc, c'est-à-dire l'action mutuelle des deux corps animés de vitesses différentes, commencera, le corps M sera sollicité par des forces dues au corps M', et dont la résultante F sera, à cause de la symétrie, dirigée suivant la droite qui passe par les deux centres de gravité; réciproquement, le corps M' recevra du premier des forces ayant leur résultante F' égale et contraire à la première. De là le changement de forme et les vibrations que devra éprouver chaque corps, suivant sa nature et la distribution de sa masse. Lorsque la différence des vitesses v, v', qui constitue la vitesse relative, n'est pas trop grande, et que les corps ont une certaine consistance, on peut admettre que le changement de forme, pendant le choc, s'étend à peu de distance du point de contact, et que les vibrations sont très-petites, d'où il suit que le mouvement de chaque corps reste sensiblement un mouvement de translation. Dans cette hypothèse, si l'on appelle V la vitesse à un instant quelconque du centre de gravité du corps dont la masse est M, vitesse qui sera approximativement commune à tous les points de ce corps à cet instant; et si l'on désigne par V' la vitesse analogue du corps dont la masse est M', au même instant, on aura, en vertu du théorème du n° 282, attendu que l'impulsion des forces extérieures pendant la durée du choc est supposée pouvoir être négligée,

$$MV + M'V' = Mv + M'v'.$$

Il arrivera toujours un instant où les deux centres de

gravité auront la même vitesse u donnée par l'équation

$$(M + M')u = Mv + M'v', \qquad [91]$$

et dans l'hypothèse de vibrations très-petites, cette vitesse u sera sensiblement commune à toutes les parties des deux corps. Cela posé, si l'action mutuelle des deux corps est non élastique, son intensité devient nulle dès l'instant où la vitesse commune u est acquise; le choc est alors terminé, et les deux corps unis conservent la vitesse u tant qu'elle n'est pas modifiée par des forces extérieures.

306. La dernière équation convient à tous les cas particuliers, soit que les deux corps aillent dans le même sens (les vitesses sont alors de même signe), soit qu'ils aillent à la rencontre l'un de l'autre (les vitesses v, v' sont alors de signes contraires, et le sens de la vitesse commune u est déterminé par son signe, qui est celui de la plus grande des deux quantités de mouvement), soit encore que l'une des masses soit en repos avant le choc (il suffit alors de faire nulle la vitesse correspondante); soit enfin que la vitesse commune u doive être nulle (ce qui a lieu quand les quantités de mouvement Mv, $M'v'$ sont égales et de signes contraires).

3° Sur la durée du choc, et l'intensité des forces en contact.

307. La durée du choc de deux corps doit dépendre de leur vitesse relative et de leur dureté; pour la déterminer par le calcul, il faudrait connaître la loi suivant laquelle varient les forces égales F, F', qui agissent au contact (305). On aura une approximation de cette durée en supposant les forces F et F' constantes. Soit x le chemin que décrit le centre de gravité du corps M, depuis le commencement du choc jusqu'à l'instant où les centres de gravité de deux corps sont supposés avoir la vitesse commune u; soit x' la quantité analogue pour le second corps; soit t le temps écoulé entre les deux instants désignés. En considérant que (283) chaque centre de gravité se meut comme si la masse du corps y était

concentrée, et que la force constante F ou F′, exercée par l'autre, y fût appliquée, on aura (153) :

$$x = vt - \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2, \qquad x' = v't + \frac{1}{2}\frac{F}{M'}t^2. \qquad [92]$$

Dans ces deux équations, les quantités x, x', sont comme v et v' des quantités algébriques, c'est-à-dire, positives ou négatives, selon leur sens sur la droite des centres de gravité. $x - x'$ sera la quantité dont les deux centres de gravité se seront rapprochés, et en la désignant par δ, on aura, d'après les deux équations précédentes,

$$\delta = (v - v')t - \frac{1}{2}Ft^2\frac{(M + M')}{MM'}.$$

Par le même théorème (283), on aura (155) deux équations qui ne sont d'ailleurs que les dérivées des deux équations [92]:

$$Mu - Mv = -Ft \ , \quad M'u - M'v' = Ft;$$

d'où éliminant u, on tire

$$Ft\,(M + M') = MM'\,(v - v').$$

Substituant cette expression dans celle de δ, on a

$$\delta = (v - v')t - \frac{1}{2}(v - v')t, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{2\delta}{v - v'};$$

au moyen de quoi on obtient la valeur de F :

$$F = \frac{MM'}{M + M'}\,\frac{1}{\delta}\,\frac{(v - v')^2}{2}, \qquad [93]$$

ou, en appelant P et P′ les poids des deux corps dont les masses sont M et M′,

$$F = \frac{PP'}{P + P'}\cdot\frac{1}{\delta}\,\frac{(v - v')^2}{2g}.$$

Exemple. Supposons, 1° que la vitesse relative $(v - v')$ des deux corps soit due à un mètre de hauteur ; 2° que l'un des poids P, P′, soit de 1 kg., et l'autre de 9; 3° que la distance δ, dont les centres de gravité sont rapprochés, soit de $0^m,001$.

En faisant, d'après ces données,

$$\frac{(v-v')^2}{2g}=1, \quad \text{ou} \quad v-v'=\sqrt{2g}=4{,}43\,;$$

$P=1$; $P'=9$; $\delta=0{,}001$, on trouve

$$t=\frac{0{,}002}{4{,}43}=0'',00045 \quad \text{et} \quad F=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{0{,}001}=900^{\text{kg}}.$$

Bien que la théorie précédente, qui suppose la force F constante, ne soit pas exacte, elle fait comprendre l'influence de la dureté (de laquelle dépend la quantité δ) sur l'intensité de l'action mutuelle et sur la rapidité du choc.

4° De la perte de puissance vive dans le choc de deux corps non élastiques.

308. Il est d'un grand intérêt, dans la mécanique industrielle, de comparer la puissance vive de deux corps immédiatement avant et après leur choc. Si les corps restent unis après s'être mutuellement comprimés, et si, négligeant les vibrations qui peuvent subsister dans les deux corps, on les considère comme ayant, à la fin du choc, une vitesse commune dans tous leurs éléments, on voit facilement, 1° qu'il y a diminution de leur somme de puissance vive ; car, pendant la compression qu'ont subie les deux corps jusqu'au moment où leurs vitesses sont devenues égales, le rapprochement des molécules voisines du contact a eu lieu malgré la répulsion que ce rapprochement même fait naître, d'où est résulté un travail négatif. 2° On voit, également sans calcul, que le travail dû aux forces moléculaires, et par conséquent la variation de puissance vive qui lui est numériquement égale, ne dépendant que du mouvement relatif des deux corps (290), ne change pas si par la pensée on imprime aux deux corps, avant le choc, une vitesse commune, que l'on compose avec les vitesses préexistantes.

309. Il suit de la dernière observation que le calcul de la diminution de puissance vive de deux corps qui se choquent peut toujours se ramener au cas où l'un des corps était en repos avant le choc. Nous ferons donc $v'=0$ dans les hypo-

thèses du n° 305. La puissance vive du système des deux corps avant le choc sera $\frac{1}{2}Mv^2$.

Si l'on suppose qu'à la fin du choc tous les éléments des deux corps aient une vitesse commune, qui sera par conséquent la vitesse u du centre de gravité, la puissance vive sera alors $\frac{1}{2}(M+M')u^2$,

qui, à cause de $u=\frac{Mv}{M+M'}$ [91], deviendra $\frac{1}{2}\frac{M^2v^2}{M+M'}$.

Donc la différence ou perte de puissance vive sera

$$\frac{1}{2}Mv^2\left(1-\frac{M}{M+M'}\right),$$

qui se réduit à

$$\frac{1}{2}\frac{MM'v^2}{M+M'}. \qquad [94]$$

310. *Application au battage des pilots.* Un mouton dont la masse est M et le poids $P=Mg$, tombe d'une hauteur h sur la tête d'un pilot; sa puissance vive avant le choc est donc $Ph=\frac{1}{2}Mv^2$. Après un choc de très-courte durée, le pilot, dont la masse est M' et le poids P', prend, ainsi que le mouton, une vitesse qui diffère peu de la vitesse u ci-dessus calculée, si la résistance du terrain est petite comparativement à la force qui se développe au contact du mouton et du pilot pendant le choc.

La puissance vive de l'ensemble est donc, à la fin du choc, dans ce cas,

$$\frac{1}{2}\frac{M^2v^2}{M+M'} \quad \text{ou} \quad Ph\frac{M}{M+M'} \quad \text{ou} \quad Ph\frac{1}{1+\frac{P'}{P}}.$$

Cette expression fait abstraction des vibrations du pilot; mais ces vibrations ne contribuent pas à l'enfoncement qu'on veut produire, et qui est sensiblement proportionnel à la puissance vive du pilot et du mouton fictivement condensés en leur centre de gravité commun. Ainsi le travail dépensé Ph restant le même, ainsi que le poids P' du pilot, on ob-

tiendra un plus grand effet à mesure que P croîtra, ce qui suppose que h décroît dans le même rapport. La diminution de puissance vive due au choc n'est pas seulement un inconvénient, comme perte d'une partie de l'effet utile du mouton; elle représente le travail moléculaire qui accompagne la déformation des pièces qui se choquent, et cette déformation peut aller jusqu'à la rupture. Cette quantité décroît quand $\frac{P}{P'}$ augmente, le produit Ph restant constant. Il est donc avantageux, par un double motif, de faire usage de moutons d'un grand poids en modérant la hauteur de leur chute. On peut vérifier qu'il est plus facile d'enfoncer un clou sans le courber en le frappant à petits coups d'un assez gros marteau, qu'à grands coups d'un marteau trop petit.

311. Si aucune des vitesses v, v' n'est nulle, on peut, sans changer le mouvement relatif des deux corps, réduire par la pensée l'un d'eux au repos, en retranchant des deux vitesses une même quantité v'; le corps de masse M n'a plus alors que la vitesse $v - v'$, le corps de masse M' est réduit au repos initial, et l'on rentre dans le cas précédent. La perte de puissance vive, numériquement égale au travail négatif dû aux actions moléculaires pendant le choc jusqu'au moment où la vitesse est devenue commune aux deux corps, s'obtient donc en substituant $v - v'$ à v dans la dernière expression [94] du n° 309. Elle est

$$\frac{1}{2}\frac{MM'(v-v')^2}{M+M'}. \qquad [95]$$

Il serait aisé de vérifier ce résultat en comparant la puissance vive avant le choc $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}M'v'^2$, avec ce qu'elle est au moment de la plus grande compression, savoir :

$$\frac{1}{2}(M+M')\,u^2.$$

En mettant pour u sa valeur $\frac{Mv + M'v'}{M+M'}$, et faisant la différence, on trouvera $\frac{1}{2}\frac{MM'(v-v')^2}{M+M'}$, comme ci-dessus.

On remarquera que cette quantité, d'après la formule [93] du n° 307, est égale au produit $F\delta$, qui doit, en effet, exprimer le travail des actions moléculaires.

312. La même considération du mouvement relatif conduit, comme on va le voir, à une autre conséquence. Quelle que soit la vitesse u, supposée commune à l'instant de la plus grande compression, on peut, sans changer la diminution de puissance vive subie par les deux corps depuis le commencement du choc, substituer aux vitesses v et v' les vitesses $v-u$, $v'-u$, dont l'une sera positive et l'autre négative. Or, dans cette supposition des vitesses initiales, la vitesse commune, au moment de la plus grande compression, sera nulle, puisqu'elle sera $u-u$; donc la perte de puissance vive sera égale à la puissance vive totale avant le choc, savoir :

$$\frac{1}{2}M(v-u)^2+\frac{1}{2}M'(u-v')^2, \qquad [96]$$

c'est-à-dire, que la perte dont il s'agit est égale à la somme des puissances vives que posséderaient les deux corps, si chacun d'eux était animé de la vitesse qu'il a perdue ou gagnée dans le choc.

Tel est le théorème de Carnot, qui se démontre ordinairement par des combinaisons algébriques, et qui peut se vérifier par ce moyen : en substituant dans [96] pour u sa valeur $\frac{Mv+Mv'}{M+M'}$, on trouvera pour résultat la perte déjà calculée [95] en fonction de M, M', v et v'.

313. Il doit être bien entendu que les formules des n°s 309, 311 et 312 donnent la perte de la puissance vive en supposant que les deux corps aient en tous leurs points une même vitesse u après le choc, ce qui revient à transporter toute la masse du système en son centre de gravité. Dans le cas où, après le choc, les corps se sépareraient, ou vibreraient, ou, en général, conserveraient des vitesses relatives, la perte calculée par les formules citées, devrait être diminuée de la puissance vive totale qu'on trouverait en ne tenant compte que du mouvement du système relativement à des axes mo-

biles passant par le centre de gravité, et restant parallèles à trois droites fixes (110).

5° Du choc des corps élastiques.

314. Il arrive souvent que deux corps, après s'être choqués directement, se séparent, en vertu des forces mutuelles répulsives qui subsistent à l'endroit du contact, à l'instant où la vitesse des deux centres de gravité est devenue commune.

Dans la théorie du choc des corps, on admet l'existence d'une élasticité parfaite, qui consiste en ce que deux molécules quelconques, qui ont été rapprochées ou éloignées, tendent à reprendre leur première distance, et en ce que leur action mutuelle, pendant le retour à cette distance primitive, repasse par les mêmes degrés d'intensité qu'elle a eus dans la période de déformation. Cette propriété paraît, en effet, appartenir à tous les corps solides auxquels on ne fait subir qu'un dérangement assez petit, et dont la limite varie suivant la nature des corps. Mais, on admet, en outre, que le choc de deux corps élastiques peut quelquefois s'accomplir de manière qu'à l'instant même où ils se séparent, ils aient repris leur figure primitive et le repos relatif de leurs molécules entre elles. Dans cette hypothèse, toujours plus ou moins éloignée de la réalité, le travail moléculaire total depuis le commencement jusqu'à la fin du choc, est nul.

Reprenant, dans cette même hypothèse, la question du choc direct du n° 305, si l'on désigne par V la vitesse du corps de masse M, après la séparation qui termine le choc, par V' la vitesse du corps de masse M' au même instant, on aura (290), les sommes de travail des forces étant nulles,

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}M'V'^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}M'v'^2, \qquad [97]$$

et cette équation, combinée avec la suivante, conséquence du théorème de la quantité de mouvement (282),

$$MV + M'V' = Mv + M'v', \qquad [98]$$

permettra de déterminer V et V'.

315. Les équations ci-dessus donnent

$$M'(V'^2 - v'^2) = M(v^2 - V^2), \quad \text{et} \quad M'(V' - v') = (v - V),$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$V' + v' = v + V, \quad \text{ou bien} \quad V' - V = v - v', \quad [99]$$

c'est-à-dire, que *la vitesse relative n'a changé que de signe*, de sorte que deux corps qui s'approchaient l'un de l'autre avec la vitesse relative $v - v'$, s'éloignent, après le choc, avec la vitesse relative $V' - V$.

316. Cela posé, les équations [98] et [99] étant du premier degré, donneront aisément les vitesses V et V'. En multipliant la seconde par M, et ajoutant membre à membre, on a

$$(M + M')\,V' = 2Mv + M'v' - Mv',$$

d'où l'on peut tirer la valeur de V'. Une formule pareille donnera la valeur de V.

La dernière équation peut s'écrire comme il suit :

$$(M + M')\,V' = 2Mv + 2M'v' - (M + M')\,v'.$$

Or, $Mv + M'v'$ est la quantité de mouvement du système fictivement condensée au centre de gravité, quantité représentée (305) par $(M + M')\,u$; l'équation ci-dessus prend donc la forme très-simple

$$V' = 2u - v',$$

laquelle, combinée avec $V' - V = v - v'$, donne $V = 2u - v$.

Les vitesses V, V', après le choc, excèdent donc la vitesse u du centre de gravité ou sont excédées par elle, autant que cette vitesse u est supérieure ou inférieure aux vitesses v, v' avant le choc.

317. Dans le cas particulier où les masses M, M' des deux corps élastiques sont égales, on a $2u = v + v'$, $V = v'$, $V' = v$, c'est-à-dire, qu'il y a échange des vitesses. Si l'un des corps est en repos avant le choc, l'autre demeurera en repos après le choc, et le premier prendra la vitesse primitive du second.

318. Deux billes d'ivoire ou de caoutchouc réalisent à peu près les hypothèses du n° 314, et les résultats de l'expé-

rience de leur choc mutuel sont assez d'accord avec les formules déduites de ces hypothèses. Mais il importe de remarquer que la figure des corps qui se choquent a une influence considérable sur le phénomène. Si l'on fait tomber une boule de caoutchouc sur une table de marbre, elle rejaillit à peu près aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur de la chute ; mais si l'on fait la même expérience avec un disque de la même matière, que l'on fasse tomber à plat, le rejaillissement est presque nul. Ce n'est cependant pas que le corps tombant ait cessé d'être presque parfaitement élastique ; mais l'explication de ce fait est dans les vibrations qui, dans le dernier cas, se propagent à l'intérieur du disque et subsistent après la séparation, tandis que lorsque les corps qui se choquent sont sphériques, ou au moins quand l'un, et le moins dur des deux, a cette figure, les vibrations n'ont une grande intensité qu'aux environs du point de contact.

319. Les parties qui se choquent dans les machines prennent ordinairement, après leur rencontre, une vitesse commune dans le sens normal au contact, et il résulte, du changement brusque des vitesses, des pertes de puissance vive ou des quantités de travail négatif qu'il importe de réduire autant que possible, et dont il faut toujours tenir compte, comme on le verra dans la suite de ces Leçons.

320. Lorsque deux corps solides glissent ou roulent l'un sur l'autre, leurs actions mutuelles produisent toujours un travail négatif ; ce phénomène constitue ce qu'on appelle en général le *frottement*. Une autre cause de travail résistant consiste dans la flexion momentanée de certaines pièces qui, en se redressant, ne restituent pas la quantité du travail employée à les fléchir ; c'est à cet ordre de faits qu'appartient ce qu'on appelle la *roideur des cordes*.

Une section spéciale de ces Leçons est consacrée à l'étude du frottement et de la roideur des cordes.

§ 7. *Notions générales sur les machines.*

321. Une machine est un corps ou un ensemble de corps

destiné à recevoir en quelques-uns de ses points certaines forces, et à exercer par d'autres points du système des forces qui diffèrent ordinairement des premières par leur intensité, par leur direction, et par la vitesse de leurs points d'application.

322. Dans certaines machines, le calcul des forces nécessaires pour atteindre le but qu'on se propose est d'un intérêt secondaire; telles sont la plupart des machines-outils et des appareils destinés à suppléer à l'adresse de la main de l'homme. L'objet essentiel est alors la perfection de l'ouvrage à accomplir, ou la régularité du mouvement à produire, quelle que doive être l'intensité du moteur et de son travail.

Au contraire, ce calcul est de la plus grande importance dans l'établissement des machines destinées à utiliser les forces que la nature met à la disposition de l'industrie pour produire sur certains corps extérieurs de grandes quantités de travail.

323. On appelle *effet dynamique* de la machine, le travail des forces qu'elle exerce sur les corps extérieurs (dont nous venons de parler) qu'on a eu en vue de soumettre à son action. Ce travail est généralement positif; mais dans quelques cas particuliers, il est négatif. C'est ce qui arrive, par exemple, dans une grue, qui sert à descendre lentement des fardeaux d'une certaine hauteur, et dans une machine locomotive, dont on emploie accidentellement la vapeur à retarder la vitesse acquise d'un train de wagons. La main de l'ouvrier sur la manivelle de la grue, et la vapeur sur les pistons de la locomotive, font alors un travail négatif ou résistant.

324. Dans les cas ordinaires, c'est-à-dire, lorsque l'effet dynamique est positif, la réaction des corps extérieurs sur lesquels la machine est destinée à agir, produit réciproquement sur elle (276) un travail négatif ou résistant. Cette réaction peut s'appeler la *résistance principale*, pour la distinguer des autres forces dont le travail négatif est dû aux actions mutuelles, soit de la machine et de ses appuis, ou de l'air environnant, soit des parties de la machine entre elles. Ces diverses forces (frottement, roideur des cordes, etc.), qui proviennent

de la constitution physique des corps, et dont le travail négatif étranger à l'objet de la machine ne peut être complétement évité, sont clairement désignées par la dénomination de *résistances secondaires.*

Quelques auteurs donnent à la résistance principale le nom de résistance *utile* ou *active*, et aux autres, le nom de *résistances passives.*

325. Les forces qui agissent (321) sur une machine, pour produire ou entretenir son mouvement, pendant qu'elle est soumise aux diverses résistances, consistent quelquefois dans l'action de la pesanteur sur la machine elle-même, quelquefois dans les actions moléculaires de ressorts intérieurs qui se détendent, mais le plus souvent dans les actions exercées par des corps qui ne font pas partie de la machine, et qui constituent son *moteur* distinct. Ils remplissent cette fonction de deux manières, tantôt en perdant partiellement la vitesse qu'ils possédaient (exemples: moulins à vent, et certaines roues hydrauliques dans lesquelles l'eau se meut à peu près horizontalement, mais en entrant avec une vitesse plus grande que la vitesse de sortie); tantôt en transmettant en totalité ou en partie les forces qu'ils reçoivent eux-mêmes, soit de la pesanteur, soit de l'élasticité des fluides, soit de l'action musculaire des animaux (exemples: roues hydrauliques mues par le poids de l'eau, machines mues par la vapeur, par des ressorts extérieurs, par des animaux).

326. Une machine étant un système de points matériels soumis à des forces extérieures et à des forces intérieures mutuelles, les principes généraux des mouvements d'un tel système sont applicables à une machine quelconque.

Appelons $\mathfrak{T}_m$ le *travail moteur* résultant, pendant un certain temps, soit de l'action de ressorts qui font partie de la machine, et se détendent, soit des forces exercées par les corps extérieurs constituant le moteur distinct;

$\mathfrak{T}$ le travail total, que nous avons désigné tout à l'heure sous le nom d'effet dynamique, pendant le même temps;

— $\mathfrak{T}$, par conséquent, le travail des forces qui, agissant sur

la machine, constituent la résistance principale dans le temps considéré ;

— $\mathfrak{T}_r$ le travail total des résistances secondaires pendant le même temps, travail dû aux frottements et ébranlements des corps voisins, aux frottements et aux déformations des parties de la machine elle-même ;

P le poids total de la machine ;

H_0 et H les ordonnées initiale et finale de son centre de gravité au-dessous d'un plan horizontal fixe quelconque ;

p ou mg le poids d'un point matériel de la machine ;

v_0 et v les vitesses initiale et finale de ce point pour le temps considéré.

Le théorème général de l'effet du travail des forces (289), et le théorème du travail dû à la pesanteur (124), donnent la relation

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_r + P(H - H_0);$$

d'où l'effet dynamique

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_m + P(H - H_0) - \mathfrak{T}_r - \left(\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2\right), \quad [100]$$

c'est-à-dire que l'*effet dynamique d'une machine est égal au travail moteur, indépendant du poids de la machine, plus au travail de la pesanteur, mesuré par le produit du poids de la machine multiplié par la hauteur dont son centre de gravité s'est abaissé pendant le temps considéré, moins le travail des résistances secondaires, moins encore l'accroissement de la puissance vive de la machine.*

327. Le terme $\mathfrak{T}_r$ croît indéfiniment avec le temps pendant lequel on considère le mouvement de la machine; il en est de même du terme $\mathfrak{T}$, tant que la machine est soumise à une résistance utile, tant qu'elle ne marche pas *à vide*. Au contraire, le terme $\frac{1}{2}\sum mv^2$ atteint promptement une valeur qu'ensuite il ne dépasse pas; souvent même il varie peu à partir de l'instant où il a atteint cette limite, et si c'est à cet instant ou après cet instant que l'on commence à compter le temps auquel se rapporte la formule précédente, la différence

$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2$ oscille, pour ainsi dire, entre des valeurs peu considérables, et qui, dans tous les cas, finissent par pouvoir être négligées auprès de la somme des quantités croissantes $\mathfrak{T}_r$ et $\mathfrak{T}$.

Il en est de même du produit $P(H - H_0)$ relatif à la descente du centre de gravité de la machine, à moins que celle-ci ne soit locomotive, auquel cas la valeur absolue de ce produit s'ajoute au travail moteur $\mathfrak{T}_m$ si le centre de gravité est descendu, et au travail des résistances nuisibles $\mathfrak{T}_r$, dans l'hypothèse contraire.

On peut donc, en calculant les termes de l'équation du numéro précédent, entre deux instants suffisamment éloignés, la réduire approximativement à la formule très-simple

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_r.$$

Elle est rigoureusement exacte si l'on considère la machine pendant le temps compris entre deux instants où les vitesses de ses diverses parties sont les mêmes, et où le centre de gravité est à la même hauteur. Cette formule est remarquable, surtout en ce que les forces qui agissent sur la machine n'y paraissent pas distinctement, mais y sont combinées avec les chemins décrits par leurs points d'application, projetés sur leurs directions.

La propriété dont cette équation renferme l'énoncé, a reçu de Coriolis le nom de *principe de la transmission du travail.*

328. On en tire une conséquence très-importante : c'est qu'*une machine rend toujours utilement moins de travail que le moteur ne lui en donne.*

329. Si l'on suppose dans la première équation du n° 326 que le travail moteur total $\mathfrak{T}_m + P(H - H_0)$ soit plus petit que le travail résistant total $\mathfrak{T} + \mathfrak{T}_r$, qui n'est jamais nul, quand même la machine marcherait à vide, on en conclut

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 < \frac{1}{2}\sum mv_0^2;$$

par conséquent la machine se ralentit, et finit par s'arrêter si l'infériorité du travail moteur se prolonge suffisamment pour

épuiser la puissance vive initiale; ce qui démontre l'absurdité de certains appareils imaginés pour obtenir un *mouvement perpétuel* sans l'intervention indéfiniment renouvelée d'un travail moteur.

330. S'il était permis de supposer qu'une machine fût sans frottements, sans choc, sans aucune résistance étrangère à l'effet qu'on se propose, hypothèse qui est quelquefois et peut-être trop souvent admise dans l'étude théorique des machines, l'équation de la transmission du travail deviendrait

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_m.$$

C'est sur cette relation qu'est fondée la maxime vulgaire en Mécanique, que *dans les machines on perd en force ce qu'on gagne en vitesse.* Il serait exact de dire qu'*on perd en force plus qu'on ne gagne en vitesse;* c'est, en d'autres termes, la remarque du n° 328.

331. Malgré la perte inévitable d'une partie du travail moteur, les machines ne sont pas moins de la plus évidente utilité, parce que, prenant le travail tel que la nature le présente disponible, elles le transportent, le disséminent ou le concentrent de mille manières, suivant nos besoins, en faisant varier à volonté l'un ou l'autre des facteurs du travail transmis, soit l'intensité de la force exercée sur le corps résistant, soit le chemin décrit par le point d'application de cette force. Par exemple, un ouvrier, en exerçant continuellement un effort moyen de 8 kilogrammes sur une manivelle dont le parcours est de $0^m,75$ par seconde, peut élever lentement un fardeau de 1000 kilogrammes, ou faire tourner rapidement un certain nombre de broches à filer, dont chacune n'offre qu'une faible résistance.

332. Il importe, pour la clarté des notions précédentes, de n'attacher à l'expression d'effet dynamique que le sens déterminé par la définition du n° 323, et de ne pas confondre ce travail avec ce qu'on peut appeler proprement *l'effet utile de la machine.* Si, par exemple, il s'agit d'une sonnette servant à battre des pilots, et si, dans cette machine, on comprend le mouton, l'effet utile consiste dans l'enfoncement des pilots

qui exige nécessairement un travail égal à celui qu'opposent le frottement et la résistance du terrain ; l'effet dynamique comprend, en outre, le travail employé inutilement à déformer la tête des pilots et à ébranler le sol à une plus ou moins grande distance (310). S'il s'agit d'une machine à élever de l'eau au moyen d'une pompe, l'effet utile consiste dans l'élévation d'une certaine quantité d'eau à la hauteur marquée par la différence de niveau des deux bassins ; il exige nécessairement un travail égal au poids de l'eau multiplié par cette hauteur ; l'effet dynamique de la pompe est le travail exercé par le piston sur l'eau en contact, et comprend, en outre de celui qui vient d'être exprimé, le travail relatif à la résistance du tuyau et à la vitesse imprimée à l'eau ; travail qui dépend de la longueur et du diamètre de la conduite.

333. Une machine est ordinairement composée de plusieurs pièces distinctes, mais liées entre elles, dont l'une, appelée *récepteur*, reçoit l'action du moteur ; et d'autres, appelées *organes de transmission de mouvement*, sont interposées entre le récepteur et les corps sur lesquels s'opère l'effet dynamique de la machine.

334. Chaque pièce d'une machine composée peut être considérée elle-même comme une machine ayant son moteur et sa résistance principale. Il arrive même communément que, dans le calcul d'une machine, en partant du récepteur, on s'arrête à une certaine pièce, au delà de laquelle le reste est considéré comme un *outil* dont les fonctions sont déterminées surtout par l'expérience, laquelle fait également connaître la vitesse qui convient à certains points de cette machine spéciale et l'intensité des forces qu'il faut appliquer à ces mêmes points pour la faire fonctionner régulièrement.

CHAPITRE II.

STATIQUE GÉNÉRALE : CONDITIONS TOUJOURS NÉCESSAIRES POUR L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME MATÉRIEL.

§ I. *De l'équilibre d'un point matériel.*

335. En traitant du mouvement d'un point matériel sous l'action de plusieurs forces constantes, nous avons vu (208) comment le mouvement absolu du mobile à un instant quelconque se compose, 1° du mouvement uniforme et rectiligne qui serait dû à la seule vitesse acquise; 2° du mouvement uniformément accéléré et rectiligne qui serait dû à la résultante des forces, si elle agissait sur le mobile sans vitesse initiale, à l'instant considéré.

La résultante des forces agissantes peut être actuellement nulle. Il faut, et il suffit pour cela, que le polygone des forces (202) soit fermé, c'est-à-dire qu'une ligne brisée, qu'on décrit en traçant successivement des droites proportionnelles et parallèles aux forces et de même sens qu'elles, soit un polygone fermé ; ou, ce qui revient au même, il faut et il suffit que les sommes des projections des forces sur trois axes non parallèles à un même plan, soient séparément nulles, puisque chacune de ces sommes est la projection de la résultante sur le même axe (203). Dans ce cas, d'après la définition même de la résultante de plusieurs forces (200), et en vertu du principe de l'inertie, le mouvement se réduit à l'uniformité rectiligne due à la vitesse acquise, et si celle-ci est nulle le repos subsiste.

336. Réciproquement, si un point matériel reste en repos ou possède un mouvement uniforme rectiligne, la résultante des forces qui le sollicitent est nécessairement nulle, puisque, si elle avait une valeur R quelconque, l'accélération du mou-

vement du point dont la masse est m serait $\frac{R}{m}$, au lieu d'être nulle.

337. Des forces qui, agissant sur un point, donnent une résultante nulle, sont dites en *équilibre*. On dit aussi, suivant une expression généralement reçue, que *ces forces se détruisent*, bien qu'en réalité elles ne cessent pas d'exister et d'agir. Si toutes ces forces, excepté une, sont connues, la dernière s'en déduit aisément, soit par une construction géométrique, soit par le calcul, car elle est égale et directement opposée à la résultante des forces connues.

338. Si, parmi les forces appliquées à un point matériel, il y en a un certain nombre dont la résultante soit nulle, les modifications du mouvement n'ont lieu qu'en vertu des autres forces; car la résultante de toutes les forces se réduit à la résultante des dernières. Cela est évidemment fondé sur la composition des forces (202).

Donc, si à des forces agissant sur un point on en joint deux ou un plus grand nombre dont la résultante soit nulle, le mouvement n'est pas changé.

339. Réciproquement, lorsque plusieurs forces sont telles qu'on peut les supprimer en conservant toutes les autres sans changer le mouvement, ces forces sont en équilibre; car leur résultante, si elles en avaient une, se combinant avec la résultante des autres forces, changerait la résultante totale.

§ 2. *Théorème du travail virtuel.*

340. Si un système matériel quelconque (plus ou moins solide, liquide ou gazeux) est en repos ou en mouvement de translation rectiligne et uniforme, chacun de ses points est en équilibre sous l'influence des forces extérieures F qui lui sont particulièrement appliquées, et des actions f qu'il reçoit des autres points du système. On dit alors que les forces extérieures F se font équilibre les unes aux autres, au moyen de la constitution physique du système.

341. Les lois auxquelles sont assujetties les forces intérieures

mutuelles des divers systèmes matériels n'étant qu'imparfaitement connues, ce n'est qu'à l'aide d'hypothèses approximativement justifiées par l'expérience, et dans des cas simples, que l'on parvient à déterminer toutes les conditions d'équilibre, soit d'un corps flexible, soit d'un système fluide. (C'est ainsi que, dans l'étude de la résistance des matériaux employés dans les constructions, on trouve la figure curviligne que prend une pièce prismatique de bois ou de fer, lorsqu'elle est posée horizontalement sur deux appuis, et soumise à des forces transversales, et l'on détermine les tensions ou pressions variables qui s'exercent longitudinalement aux divers points de cette pièce; c'est encore ainsi qu'en admettant la fluidité parfaite d'un liquide pesant on calcule la pression qu'il exerce dans l'état d'équilibre en tout point donné des parois du vase qui le contient.) Mais, dans tous les cas d'équilibre d'un système matériel quelconque, nous allons voir qu'il existe certaines conditions auxquelles satisfont nécessairement les forces extérieures, quelles que puissent être les forces intérieures; et ces conditions sont implicitement contenues dans une formule unique et d'une simplicité très-remarquable, déduite de la considération du travail des forces.

342. Soit un système de points matériels..... m', m'', m''', etc., en équilibre, tandis qu'ils sont soumis à diverses forces, savoir: 1° à des forces extérieures qui, réduites pour chaque point à une résultante unique, sont respectivement F', F'', F''', etc.; 2° à des forces intérieures qui sont, suivant la notation convenue au n° 276,

Pour le point m'. . . . . $f'_{\prime\prime}, f'_{\prime\prime\prime}$, etc.

Pour le point m''. . . . . $f''_{\prime}, f''_{\prime\prime\prime}$, etc.,

et ainsi de suite.

Transportons par la pensée le point m' dans une position infiniment voisine n', sans tenir compte des obstacles que les points ou corps environnants peuvent opposer en réalité à ce déplacement, et en supposant que les forces F', $f'_{\prime\prime}$, $f'_{\prime\prime\prime}$, etc., qui sollicitent réellement ce point m', l'accompagnent dans ce mouvement purement idéal appelé *mouvement virtuel*.

De ce déplacement il résultera pour chacune des forces agis-

sant sur m' un travail élémentaire que nous appellerons *travail virtuel*, et la somme de tous ces travaux sera exactement nulle, parce que le travail total d'un nombre de forces appliquées à un même point est égal au travail de leur résultante (215), et parce qu'ici la résultante des forces considérées comme appliquées au point m' en mouvement est nulle. Nous aurons donc en remplaçant par la notation $\mathfrak{T}_v$ les mots *travail virtuel*,

$$\mathfrak{T}_v F' + \mathfrak{T}_v f'_{,,} + \mathfrak{T}_v f'_{,,,} + \text{etc.} = 0. \qquad [101]$$

En d'autres termes, si par la position du point m' du système on décrit un arc infiniment petit $m'n'$ ou ds' d'une direction quelconque, on a toujours la relation

$$F' ds' \cos(F', ds') + F'_{,,} ds' \cos(F'_{,,} ds') + F'_{,,,} ds' \cos(F'_{,,,} ds') + \text{etc.} = 0,$$

ce qui est évident, puisque, par la suppression du facteur commun ds', cette équation revient à dire que, lorsque plusieurs forces appliquées à un même point sont en équilibre, la somme algébrique de leurs projections sur un axe est nulle, quelque direction qu'on donne à cet axe (335).

Ce que nous venons de faire pour l'élément m', faisons-le pour le reste du système, dont nous imaginerons que chaque point subisse un déplacement infiniment petit, qu'on peut d'abord supposer absolument quelconque, et par conséquent indépendant du mouvement idéal attribué aux autres points. Nous aurons ainsi pour chaque point une équation analogue à l'équation [101], savoir :

pour m'', $\quad \mathfrak{T}_v F'' + \mathfrak{T}_v f''_{,} + \mathfrak{T}_v f''_{,,,} + \text{etc.} = 0,$
pour m''', $\quad \mathfrak{T}_v F''' + \mathfrak{T}_v f'''_{,} + \mathfrak{T}_v f'''_{,,} + \text{etc.} = 0,$

et ainsi de suite pour tous les éléments du système.

Ajoutons ensemble toutes ces équations, en réunissant dans une notation unique tous les travaux virtuels des forces extérieures, et dans une autre tous les travaux virtuels des forces intérieures; nous obtenons la formule générale

$$\sum \mathfrak{T}_v F + \sum \mathfrak{T}_v f = 0, \qquad [102]$$

qui signifie que *la somme algébrique des travaux virtuels de toutes les forces tant extérieures qu'intérieures est nulle lorsque*

l'équilibre existe; formule que nous aurions pu écrire immédiatement, en vertu de l'état d'équilibre de chaque point, si nous n'avions préféré, pour plus de clarté, entrer dans les détails qui précèdent.

343. Maintenant, pour débarrasser la formule [102] de la considération des forces intérieures, il suffit de remarquer que *parmi tous les mouvements virtuels imaginables il en est une infinité dans lesquels le travail virtuel total des forces mutuelles est nul;* tels sont ceux dans lesquels les distances mutuelles des éléments du système ne sont pas changées (269); en d'autres termes, *tels sont les mouvements virtuels compatibles avec l'hypothèse de la parfaite solidité du système.*

Si l'on réduit à ce seul genre les mouvements virtuels imprimés au système matériel, l'équation [102] se réduit à celle-ci :

$$\sum \mathfrak{T}_e F = 0. \qquad [103]$$

C'est-à-dire que *dans tout mouvement virtuel compatible avec l'hypothèse de la solidité parfaite du système, la somme algébrique des travaux virtuels des forces extérieures est nulle, lorsque l'équilibre existe.* Telle est la formule annoncée à la fin du n° 341.

344. La réciproque de cette proposition ne serait pas vraie, si on l'appliquait à des corps flexibles, ou plus généralement à des systèmes susceptibles de changements de figure sous l'action des forces extérieures; par exemple, un tel système soumis à deux forces égales et directement opposées peut n'être pas en équilibre, bien que la condition de la formule [103] soit alors satisfaite (117).

Mais si l'on admet l'existence de corps parfaitement solides, la réciproque de la proposition fondamentale qui vient d'être énoncée est exacte, c'est-à-dire que :

Pour qu'un corps solide soit en équilibre, c'est-à-dire, pour que d'abord en repos il y persiste, *il suffit que dans tous les mouvements hypothétiques de ce corps, le travail total des forces extérieures soit nul.*

En effet, si ce corps, supposé d'abord en repos, se mettait en mouvement, il acquerrait dans un temps très-court une

puissance vive très-petite mais réelle, ce qui est impossible (290), puisque le travail total des forces extérieures serait nul d'après l'énoncé, et que le travail des forces intérieures mutuelles serait également nul, d'après l'hypothèse de la solidité du système (291).

345. Les deux propositions qui viennent d'être démontrées se résument dans les termes suivants :

THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA STATIQUE GÉNÉRALE.

Pour qu'un corps solide soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique du travail virtuel des forces extérieures soit nulle pour tous les mouvements du corps compatibles avec la condition de solidité.

Lorsqu'il s'agit d'un corps ou système matériel susceptible de déformation, les mêmes conditions générales d'équilibre sont encore nécessaires, mais ne sont pas suffisantes.

346. REMARQUE. Chacun des termes de l'équation [103] du travail virtuel est infiniment petit, puisqu'il est de la forme $F ds \cos(F, ds)$; mais si l'on divise tous ces termes par l'un des chemins infiniment petits ds', ds'', ds''', etc., il ne restera dans l'équation que des quantités finies, savoir, les forces, les cosinus de leurs angles avec des tangentes aux arcs ds', ds'', ds''', etc., enfin les rapports de ces divers arcs à l'un d'eux. On conçoit donc que la formule [103] doit conduire à des relations numériques et géométriques entre les forces extérieures appliquées à un système en équilibre. C'est ce qui va se réaliser dans le paragraphe suivant.

Les relations dont il s'agit, ne renfermant plus d'infiniment petits et n'impliquant aucune idée de mouvement virtuel, s'appellent *équations d'équilibre.*

§ 3. *Des deux espèces les plus simples d'équations générales d'équilibre.*

347. Parmi les mouvements virtuels qu'on peut imaginer, les plus simples sont les mouvements de translation rectiligne (45), et les mouvements de rotation autour d'un axe fixe (47); chaque mouvement de l'une ou de l'autre espèce,

compatible avec la solidité parfaite du système, donne, pour la somme du travail virtuel des forces extérieures, un résultat facile à exprimer.

ÉQUATIONS DÉDUITES DU MOUVEMENT VIRTUEL DE TRANSLATION.

348. Dans le mouvement de translation parallèle à un axe quelconque Ou, tous les points d'application des forces décrivent des chemins égaux et parallèles, et les projections rectangulaires des forces F', F'', ... sur ces chemins prolongés, sont égales à leurs projections F'_u, F''_u sur l'axe Ou. Donc, si du indique la quantité dont tous les points sont supposés transportés, le travail virtuel total des forces est (118)

$$\sum du F_u \quad \text{ou} \quad du \sum F_u .$$

Cette somme algébrique devant être nulle, quel que soit l'axe Ou, on a, en supprimant le facteur commun du, l'équation

$$\sum F_u = 0 \quad \text{ou} \quad \sum F \cos(F, ou) = 0 .$$

Ainsi, *dans le cas d'équilibre, la somme algébrique des projections des forces extérieures sur un axe quelconque se réduit à zéro;* ce qui exige, 1° que de ces forces les unes fassent avec l'axe considéré des angles aigus, les autres des angles obtus; 2° que la somme absolue des projections des premières soit égale à la somme absolue des projections des dernières.

349. Cette propriété des forces en équilibre ne dépend que des intensités des forces et des angles qu'elles font entre elles, quelles que soient les distances de leurs points d'application entre eux; on ne changerait pas la somme de leurs projections sur un axe quelconque, si l'on transportait par la pensée ces forces parallèlement à elles-mêmes en un point d'application. Or, on sait que des forces ainsi transportées ont une résultante unique (202), qui s'appelle la *résultante de translation* des forces primitives (284), et dont la projection sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des composantes (203).

La formule $\sum F_u = 0$ signifie donc que la *projection sur*

un axe quelconque de la résultante de translation de forces en équilibre est nulle.

350. Il est clair qu'il suffit que cette condition soit vérifiée relativement à trois axes non parallèles à un même plan pour qu'on soit en droit de conclure qu'elle est satisfaite pour un axe quelconque. En effet, soient Ox, Oy, Oz ces trois axes. Si l'on a $\sum F_x = 0$, on en conclut que la résultante de translation est perpendiculaire à l'axe Ox, à moins qu'elle ne soit nulle. Si l'on a, en même temps, $\sum F_y = 0$, il s'ensuit que la résultante de translation est perpendiculaire au plan xOy ou nulle. Enfin, si l'on a encore $\sum F_z = 0$, la résultante de translation ne pouvant être perpendiculaire à la fois aux trois axes, est nécessairement nulle, et, cela étant, sa projection sur un autre axe quelconque ne peut être que nulle. Ainsi, il suffit que les trois équations

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum F_z = 0, \qquad (104)$$

dont chacune est distincte des deux autres, soient vérifiées, pour qu'il soit certain que toute équation $du \sum F_u = 0$, ou $\sum F_u = 0$, déduite d'un mouvement quelconque de translation serait également satisfaite.

ÉQUATIONS DÉDUITES DU MOUVEMENT DE ROTATION.

351. Dans le mouvement de rotation du système autour d'un axe Ou, tous les points, conservant leurs distances entre eux et à cet axe, décrivent des arcs proportionnels à leurs rayons, et, d'après ce qu'on a vu au n° 121, la somme des travaux virtuels des forces est exprimée par la formule

$$d\sigma \sum \mathfrak{M}_{Ou} F.$$

Cette somme devant être nulle, quel que soit l'axe Ou, on a, en supprimant le facteur commun $d\sigma$, l'équation

$$\sum \mathfrak{M}_{Ou} F = 0.$$

Ainsi, dans le cas d'équilibre, la somme algébrique des moments des forces extérieures par rapport à un axe quelconque, se réduit à zéro, c'est-à-dire que

1° Un axe quelconque étant choisi, et un sens de rotation

autour de cet axe étant regardé comme positif, il faut qu'il y ait des forces dont le travail soit positif, quand le mouvement virtuel est dans ce sens, et d'autres dont le travail soit négatif; c'est ce qu'on exprime encore en disant que certaines forces tendent à faire tourner le système dans un sens, et d'autres, dans le sens contraire;

2° Il faut que la somme absolue des moments des premières forces soit égale à la somme absolue des moments des dernières.

352. Cette règle générale étant étendue aux trois axes Ox, Oy, Oz, conduit aux équations

$$\sum M_{Ox} F = 0, \quad \sum M_{Oy} F = 0, \quad \sum M_{Oz} F = 0. \quad [105]$$

353. Ces trois équations sont évidemment distinctes de celles du n° 350, car les moments des forces dépendent de leur situation dans l'espace; et elles sont aussi distinctes entre elles, car si, par exemple, les forces F étaient toutes dans le plan xOy, les deux premières équations seraient satisfaites et la troisième pourrait ne pas l'être.

Il reste à examiner si, par un mouvement virtuel différent des six mouvements simples qui ont conduit aux équations précédentes, il serait possible d'obtenir une autre condition distincte. Cette question, qui pourrait être résolue par des considérations de géométrie analytique, le sera plus simplement par la théorie des forces équivalentes présentée dans le paragraphe suivant.

§ 4. *Des forces équivalentes appliquées à un corps solide, ou en général à un système dont les mouvements virtuels sont compatibles avec l'hypothèse de la solidité.*

354. La somme du travail virtuel des forces extérieures appliquées à un système quelconque, dans tout mouvement compatible avec la solidité de ce système, n'est pas altérée si l'on introduit dans le système ou si l'on en retranche des forces en équilibre, c'est-à-dire, des forces dont les travaux

virtuels se détruisent algébriquement dans tout mouvement compatible avec la solidité du système (343). C'est ce qui arrive dans les cas particuliers suivants :

1° Lorsqu'on substitue une force à ses composantes agissant sur un même point, ou réciproquement (215) ;

2° Lorsqu'on introduit ou qu'on supprime deux forces égales et directement opposées, appliquées soit à un même point, soit à des points différents dont la distance est invariable dans les mouvements supposés (117) ;

3° Lorsqu'on transporte une force d'un point à un autre de la droite suivant laquelle elle agit en conservant son intensité et le sens de son action. En effet, transporter la force F de A en B (*fig.* 44) revient à appliquer au point B deux forces F', F'' égales à F, puis à supprimer les forces F et F'', qui sont dans le second cas.

355. *Remarque.* Bien que dans la nature les forces soient toujours appliquées à des points matériels, rien n'empêche, lorsque, pour la considération des travaux virtuels, on veut transporter une force d'un point à un autre, de supposer que ce dernier ne soit qu'un point géométrique, dont les distances aux éléments matériels du système restent invariables. N'oublions pas, en effet, que l'existence des travaux virtuels des forces est purement idéale, indépendante des masses des points d'application, et n'est qu'un moyen d'arriver à des relations numériques et géométriques entre les forces extérieures d'un système en équilibre.

356. Définitions. *Lorsque, par des modifications quelconques, des forces agissant sur un système de points sont ou peuvent être remplacées par d'autres, sans que le travail virtuel soit altéré, pour quelque mouvement que ce soit compatible avec la solidité du système, on dit que les dernières forces sont* ÉQUIVALENTES *aux premières, ou mieux que les deux systèmes de forces sont* ÉQUIVALENTS.

Lorsque plusieurs forces peuvent se réduire à une seule équivalente, celle-ci s'appelle leur RÉSULTANTE.

357. *Remarque.* Quand des forces appliquées à un corps ou système matériel sont en équilibre, l'une quelconque d'en-

tre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, car la somme algébrique du travail de toutes les forces étant nulle dans un mouvement virtuel quelconque (343), le travail de l'une d'elles est égal et de signe contraire à la somme de travail de toutes les autres, d'où il suit que le travail virtuel de son opposée serait égal à cette somme et de même signe.

Plus généralement, quand des forces appliquées à un corps quelconque sont en équilibre, si on les partage en deux groupes P', P'',..... $P^{(m)}$, F', F''..... $F^{(n)}$; et qu'on imagine d'autres forces F'_1, F''_1,..... $F_1^{(m)}$ égales et directement opposées aux forces P', P''..... $P^{(m)}$ de l'un des groupes, du premier, par exemple; le second groupe F', F'',.... $F^{(n)}$ et le troisième F'_1, P''_1,..... $F^{(m)}$ sont équivalents; car, d'après l'hypothèse, dans un mouvement virtuel quelconque, le travail total des forces F', F''..... sera égal et de signe contraire à celui des forces P', P'',..... et, par conséquent, égal à celui des forces F'_1, F''_1..... avec le même signe.

Il est aisé de voir que la réciproque de cette proposition est également vraie, c'est-à-dire que lorsque deux systèmes de forces sont équivalents, les forces de chaque système feraient équilibre à celles de l'autre, si celles-ci étaient prises en sens contraire.

358. Théorème. *Lorsque deux groupes de forces* F', F'',..... F'_1, F''_1..... *sont équivalents, la somme des projections des forces sur un axe et la somme de leurs moments par rapport à un axe quelconque sont les mêmes pour les deux groupes.*

En effet, pour un moment virtuel quelconque, les travaux des deux groupes de forces donnent la même somme algébrique. Or, 1° dans le mouvement virtuel de translation parallèle à un axe quelconque Ou, le travail total des forces F est $du\sum F_u$ (348), et celui des forces F_1 est $du\sum F_{1u}$, d'où l'on conclut

$$\sum F_u = \sum F_{1u};$$

2° Dans le mouvement virtuel de rotation autour de Ou, le travail total des forces F est $d\sigma\sum \mathfrak{M}_{O_u}F$ (351), et celui des forces F_1 est $d\sigma\sum \mathfrak{M}_{O_u}F_1$, d'où l'on conclut

$$\sum \mathfrak{M}_{O_u} F = \sum \mathfrak{M}_{O_u} F_1.$$

359. Corollaire. De l'équation $\sum F_u = \sum F_{1u}$ étendue à trois axes, et des propriétés de la résultante de translation rappelées au n° 349, on conclut que deux groupes de forces équivalents ont la même résultante de translation.

360. Théorème. *Autant de forces* F', F'', $F''' \ldots\ldots F^{(n)}$, *qu'on voudra, peuvent se réduire d'une infinité de manières à deux forces équivalentes dont l'une au moins passe par un point donné* O, *et dont l'autre est dans un plan déterminé par le choix d'ailleurs arbitraire du point* O.

Démonstration. 1° Considérons les deux plans passant l'un par la force F' et le point donné O, l'autre par la force F'' et le même point; ils se coupent suivant une droite OK'' (*fig.* 45).

La force F' appliquée au point M' peut être remplacée (354) par deux composantes P', Q', situées dans le plan $M'OK''$, et passant l'une par O, l'autre par un point K'' choisi *arbitrairement* sur l'intersection OK'' (207); de même F'' appliquée au point M'' et située dans un même plan avec OK'', peut être remplacée par deux forces P'' et Q'' passant l'une par O et l'autre par K''. Aux forces P' et P'', transportées en O, on substitue leur résultante S''; aux forces Q', Q'', transportées en K'', on substitue leur résultante T''. On a ainsi autant de forces qu'auparavant; mais l'une S'' passe par le point donné O; il n'en reste que $n-1$, savoir, T'', F''', $F^{\text{iv}}, \ldots\ldots$, qui peuvent n'y point passer.

Faisant pour T'' et F''' ce qu'on a fait pour F' et F'', on les remplacera par deux forces, dont l'une, passant par O, se composera avec S'', et donnera une force unique appliquée à ce point, de sorte que le nombre des forces ne passant pas par O sera encore diminué d'une unité. Ainsi de suite, on réduira toutes les forces à deux, S, T, dont la première au moins passera par le point O; et ces deux forces S, T, seront équivalentes aux forces F', F'', $F''' \ldots\ldots F^{(n)}$, c'est-à-dire que dans un mouvement virtuel quelconque, compatible avec la solidité du système des points d'application primitifs et nouveaux, le travail total des forces S et T sera égal à celui des forces primitives.

Deux équivalentes, S et T, étant ainsi trouvées, si l'on considère le plan passant par le point O et par la force T, on peut remplacer cette dernière force par deux autres, dont l'une, passant en O, se compose avec S, et l'autre passe par un point choisi arbitrairement dans ce plan : ce qui prouve qu'il y a une infinité de manières de satisfaire à la première partie de l'énoncé.

2° Soient deux forces S', T' formant un groupe équivalent à celui des deux forces S, T; il s'agit de faire voir que si les deux forces S et S' passent par un point O, les deux autres T et T' sont dans un plan passant par le même point O. Pour le démontrer, concevons que dans le plan déterminé par le point O et par la force T, on mène deux axes Ox, Oy. Les sommes de moments des deux groupes équivalents, par rapport à ces axes, doivent être égales (358). Or, les moments des forces S, T, S' sont nuls (122). Donc, il en est de même du moment de T'; cette dernière force est donc (122) dans un même plan avec chacun des deux axes Ox, Oy; elle est donc dans le plan déterminé par le point O et la force T : ce qui démontre la seconde partie de la proposition.

Remarque. Les deux secondes équivalentes T, T', ont une propriété qui mérite d'être signalée : si l'on considère un axe Oz, perpendiculaire au plan xOy qui les contient, leurs moments, par rapport à cet axe, sont égaux et de même sens (358), attendu que les moments de S et de S' sont encore nuls. En d'autres termes, les produits des forces T, T', par leurs distances respectives au point O sont égaux, et ces forces tendraient à faire tourner dans le même sens autour de l'axe Oz un corps solide lié à cet axe.

§ 5. *Des six équations suffisantes pour l'équilibre d'un système solide.*

361. On doit avoir bien compris (341) que les conditions complètes de l'équilibre d'un corps ou système matériel, plus ou moins flexible, dépendent de sa constitution physique; mais que dans tous les cas, les forces extérieures doivent satis-

faire à certaines relations indépendantes de cette constitution, et toutes contenues implicitement dans la formule (103) du travail virtuel (343). Cette formule, disons-nous, renferme toutes les conditions d'équilibre indépendantes de la constitution intérieure du système, puisque, dans l'hypothèse de la parfaite solidité, il suffit pour l'équilibre que les forces satisfassent aux conditions qui se déduisent de cette même formule (344).

Nous allons voir maintenant que toutes ces conditions se réduisent aux six équations distinctes que nous avons obtenues aux nos 350 et 352.

362. Par un point O, concevons qu'on mène trois axes Ox, Oy, Oz qui ne soient pas dans un même plan, mais faisant d'ailleurs des angles quelconques. Nous venons de démontrer (360) que, quelles que soient les forces F', F'', F'''.... appliquées à un système de figure invariable pendant les mouvements virtuels qu'on lui attribue, elles équivalent quant au travail à deux forces, dont l'une S passe par le point O, et l'autre T peut n'y pas passer.

Cela posé, si les forces F', F'', F'''..... satisfont aux équations

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum F_z = 0,$$

nous en conclurons que leur résultante de translation est nulle (350); qu'il en est, par conséquent, de même de la résultante de translation des deux forces S et T (359), c'est-à-dire que ces deux dernières forces sont égales, parallèles et dirigées en sens opposés.

Deux pareilles forces, lorsqu'elles ne coïncident pas sur une même droite, forment ce que M. Poinsot a appelé un *couple*.

Ainsi, *lorsque les sommes des projections des forces sur trois axes sont séparément nulles, ces forces peuvent se réduire à un couple équivalent.*

363. Maintenant, si les forces F', F'', F''',..... satisfont à la première des trois équations des moments (352), savoir

$$\sum \mathfrak{M}_{0x} F = 0,$$

en nous appuyant sur la seconde partie du théorème du n° 358, et attendu que le moment de S, l'une deux équivalentes, est

nul, puisque cette force passe par le point O, nous conclurons que, par rappòrt à l'axe Ox, le moment de T, la deuxième de ces forces, est aussi nul; et, par conséquent (122), cette force T est dans un même plan avec l'axe Ox.

Si l'on a en même temps l'équation

$$\sum \mathfrak{M}_{Oy} F = 0,$$

on conclura de même que la deuxième équivalente T est dans un même plan avec l'axe Oy, que, par conséquent, elle est dans le plan xOy, à moins qu'elle ne passe par le point O.

Enfin, si la troisième équation

$$\sum \mathfrak{M}_{Oz} F = 0,$$

est satisfaite en même temps que les deux précédentes, il faut que la deuxième équivalente T passe comme la première au point O; car elle ne pourrait autrement être dans un même plan avec chacun des trois axes.

Donc, les deux équivalentes S et T passant en O, se réduisent à une seule, c'est-à-dire à une *résultante* passant en ce point.

Ainsi, *lorsque les sommes des moments des forces par rapport à trois axes conjugués sont séparément nulles, ces forces peuvent se réduire à une résultante unique passant par l'origine commune des axes.*

364. Si les forces satisfont à la fois aux six équations

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad [104]$$
$$\sum \mathfrak{M}_{Ox} F = 0, \quad \sum \mathfrak{M}_{Oy} F = 0, \quad \sum \mathfrak{M}_{Oz} F = 0, \quad [105]$$

il résulte de ce qui précède, que les deux équivalentes S et T sont égales et directement opposées, et par conséquent se réduisent à zéro.

Donc ces six équations suffisent pour affirmer (356) que dans tous les mouvements virtuels compatibles avec la solidité du système le travail des forces F est nul, et que, par conséquent, le système matériel, s'il est solide et en repos, persévère dans cet état; ce qu'on exprime en disant qu'*il est en équilibre sous l'action des forces.*

Donc *les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre*

d'un corps solide sont au nombre de six, dont trois consistent en ce que les sommes algébriques des projections des forces extérieures sur trois axes non parallèles à un même plan, soient nulles pour chacun de ces axes; et les trois autres conditions consistent en ce que les sommes algébriques des moments des forces extérieures, par rapport à trois axes concourants et non situés dans un même plan, soient nulles pour chacun de ces trois axes.

On remarquera, ou l'on vérifiera sans difficulté en relisant attentivement les raisonnements sur lesquels sont fondées les six équations [104] et [105], qu'il n'est pas nécessaire que les trois axes de projection des x, des y et des z, auxquels se rapportent les trois premières [104], soient les mêmes que les axes de moments, Ox, Oy et Oz, auxquels se rapportent les trois dernières équations [105].

§ 6. *Des six conditions d'équivalence de deux systèmes de forces.*

365. Pour qu'un groupe de forces F', F'', F''',... soit équivalent à un autre groupe de forces F'_1, F''_1, F'''_1..., il faut et il suffit (357) que, si l'on imagine les forces P', P'', P'''... égales et directement opposées à celles du second groupe, les forces réunies du premier et du troisième groupe satisfassent aux conditions générales de l'équilibre; donc on a

$$\sum F_x + \sum P_x = 0, \quad \sum F_y + \sum P_y = 0, \quad \sum F_z + \sum P_z = 0,$$
$$\sum \mathfrak{M}_{0x} F + \sum \mathfrak{M}_{0x} P = 0, \quad \sum \mathfrak{M}_{0y} F + \sum \mathfrak{M}_{0y} P = 0,$$
$$\sum \mathfrak{M}_{0z} F + \sum \mathfrak{M}_{0z} P = 0.$$

Mais, d'après l'hypothèse, les projections et les moments des forces P sont égaux et de signes contraires aux projections et aux moments des forces F; donc les six équations précédentes reviennent à celles-ci :

$$\sum F_x = \sum F_{1x}, \quad \sum F_y = \sum F_{1y}, \quad \sum F_z = \sum F_{1z},$$
$$\sum \mathfrak{M}_{0x} F = \sum \mathfrak{M}_{0x} F_1, \quad \sum \mathfrak{M}_{0y} F = \sum \mathfrak{M}_{0y} F_1, \quad \sum \mathfrak{M}_{0z} F = \sum \mathfrak{M}_{0z} F_1.$$

Ainsi, *pour que deux systèmes de forces soient équivalents, il faut et il suffit que les sommes de leurs projections sur trois*

axes non parallèles à un même plan et les sommes de leurs moments par rapport à trois axes conjugués, soient respectivement égales pour chaque axe dans l'un et l'autre système.

366. En appliquant ce théorème général au cas particulier où les forces F ont une résultante, c'est-à-dire une seule équivalente R, on a les six équations

$$R_x = \sum F_x, \qquad R_y = \sum F_y, \qquad R_z = \sum F_z,$$
$$\mathfrak{M}_{0x}R = \sum \mathfrak{M}_{0x}F, \quad \mathfrak{M}_{0y}R = \sum \mathfrak{M}_{0y}F, \quad \mathfrak{M}_{0z}R = \sum \mathfrak{M}_{0z}F.$$

Ainsi, *pour qu'un système de forces ait une résultante, il faut et il suffit qu'il existe une force dont les projections sur trois axes non parallèles à un même plan et les moments par rapport à trois axes conjugués soient de mêmes valeurs et de mêmes signes que les sommes des projections et des moments des forces du système relativement aux mêmes axes.*

§ 7. *Expression analytique des six équations d'équilibre, et des six équations d'équivalence, en fonctions des composantes des forces parallèles à trois axes, et des coordonnées des points d'application de ces forces* (*).

367. Équations d'équilibre. Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point M pris sur la direction de la force F. Décomposons cette force en trois autres appliquées au point M et parallèles aux axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Soient ces forces représentées pour l'intensité et le sens par les quantités X, Y, Z, positives ou négatives, c'est-à-dire que l'on a

$$X = F\cos(F,x), \quad Y = F\cos(F,y), \quad Z = F\cos(F,z).$$

Si l'on fait la même chose pour toutes les forces d'un système en équilibre, les équations [104] du n° 364 seront remplacées par

$$\sum X = 0, \qquad \sum Y = 0, \qquad \sum Z = 0. \qquad [106]$$

(*) On peut, dans une première étude, se dispenser de lire ce paragraphe, et passer immédiatement au n° 372.



Le moment de la force F, par rapport à l'axe des x, est égal à la somme des moments de ses composantes Y, Z (358), attendu que le moment de la force X, par rapport à cet axe, est nul, puisqu'elle lui est parallèle.

Or, en supposant, 1° que le mouvement virtuel de rotation soit tel que l'axe Oy tende à se rapprocher de la position de Oz; 2° que les quantités Y, Z, y, z soient positives, on voit aisément (*fig.* 46) qu'on a

$$\mathfrak{M}_{0x}Z = Zy \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_{0x}Y = -Yz,$$

et, par conséquent,

$$\mathfrak{M}_{0x}F = Zy - Yz;$$

et en faisant toutes les hypothèses possibles sur les signes des composantes Z, Y, et des coordonnées z, y, on reconnaît que cette formule est générale. Il s'ensuit que si l'on fait pour toutes les forces du système ce que nous venons de faire pour la force quelconque F, on aura

$$\sum\mathfrak{M}_{0x}F = \sum(Zy - Yz).$$

Pour avoir les expressions analogues des sommes des moments par rapport aux axes Oy et Oz, on remplacera d'abord dans cette formule x par y, y par z, z par x, Z par X, Y par Z, c'est-à-dire chaque lettre par la suivante, dans l'ordre x, y, z, x, puis on fera une seconde mutation semblable. Ainsi les trois équations des moments nécessaires pour l'équilibre se trouveront traduites comme il suit:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{au lieu de} & \sum\mathfrak{M}_{0x}F = 0, & \sum(Zy - Yz) = 0 \\ \text{au lieu de} & \sum\mathfrak{M}_{0y}F = 0, & \sum(Xz - Zx) = 0 \\ \text{au lieu de} & \sum\mathfrak{M}_{0z}F = 0, & \sum(Yx - Xy) = 0 \end{array}\right\} [107]$$

368. Dans le numéro précédent, les axes Ox, Oy, Oz sont supposés rectangulaires. Il est digne de remarque que si les coordonnées x, y, z des points d'application des forces sont relatives à trois axes obliques quelconques, et si les composantes X, Y, Z sont parallèles à ces axes, les six équations précédentes [106] et [107] sont encore nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système solide.

D'abord les trois premières expriment que la résultante de

translation est nulle (350). Dans les deux systèmes d'axes, les sommes $\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$ sont les trois côtés contigus d'un parallélipipède dont la résultante est la diagonale. Pour que celle-ci soit nulle, il faut et il suffit que les trois côtés le soient.

Cherchons maintenant ce que deviennent les équations des moments dans le cas d'axes obliques. Soient Ox_1, Oy_1, Oz_1 ces trois axes. Imaginons, en outre, trois axes Ox, Oy, Oz rectangulaires, dont l'un Ox se confonde avec Ox_1. En appelant, comme tout à l'heure, x, y, z les coordonnées du point M, pris sur la direction de la force F, dans le système des derniers axes, et X, Y, Z les composantes ou projections rectangulaires de la force F, on a, comme on vient de le voir, le moment de cette force, par rapport à l'axe Ox ou Ox_1, exprimé par $Zy - Yz$.

Maintenant, par une proposition connue de la théorie des projections (*Géom. anal.*, 48), si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du même point M dans le système des axes obliques Ox_1, Oy_1, Oz_1, et par X_1, Y_1, Z_1, les composantes ou projections obliques conjuguées de la force F sur les mêmes axes, on a

$$y = x_1 \cos(x_1 y) + y_1 \cos(y_1 y) + z_1 \cos(z_1 y),$$
$$z = x_1 \cos(x_1 z) + y_1 \cos(y_1 z) + z_1 \cos(z_1 z),$$
$$Z = X_1 \cos(x_1 z) + Y_1 \cos(y_1 z) + Z_1 \cos(z_1 z),$$
$$Y = X_1 \cos(x_1 y) + Y_1 \cos(y_1 y) + Z_1 \cos(z_1 y),$$

équations dont les seconds membres se réduisent immédiatement à leurs deux derniers termes, attendu que les angles $x_1 y$, $x_1 z$ étant droits, leurs cosinus sont nuls. Mais de plus, comme les axes Oy, Oz peuvent être pris à volonté, pourvu qu'ils soient à angle droit entre eux, et avec Ox ou Ox_1, nous profiterons de cette indétermination pour simplifier davantage ces quatre expressions, en prenant l'axe Oy dans le plan $x_1 O y_1$, et par conséquent l'axe Oz perpendiculaire à ce même plan. Alors on a $\cos(y_1 z) = 0$. Ainsi les quatre expressions ci-dessus peuvent s'écrire comme il suit :

$$y = y_1 \cos(y_1 y) + z_1 \cos(z_1 y), \qquad z = z_1 \cos(z_1 z),$$
$$Z = Z_1 \cos(z_1 z), \qquad Y = Y_1 \cos(y_1 y) + Z_1 \cos(z_1 y),$$

(ce qu'on vérifierait aisément, à l'aide d'une figure), et en les substituant dans la formule $Zy - Yz$ du moment de la force F, on obtient, après réduction,

$$\mathfrak{M}_{Ox_1}F = Zy - Yz = (Z_1y_1 - Y_1z_1)\cos(y_1y)\cos(z_1z).$$

Le coefficient $\cos(y_1 y)\cos(z_1 z)$ n'est jamais nul, car l'angle $(y_1 y)$ est le complément de l'angle x_1Oy_1, et ne peut être droit, sans quoi les axes Ox_1, Oy_1, seraient suivant une même droite; l'angle $(z_1 z)$ est le complément de l'angle de l'axe Oz_1, avec le plan x_1Oy_1, et, s'il était droit, les trois axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, seraient dans un même plan.

Ainsi, dans le système des axes obliques, le moment d'une force par rapport à l'axe Ox_1 a pour expression

$$a(Z_1y_1 - Y_1z_1),$$

a étant un coefficient qui dépend des angles respectifs des axes. Donc, pour un nombre quelconque de forces, la somme algébrique de leurs moments, par rapport à l'axe Ox_1, sera

$$a\sum(Z_1y_1 - Y_1z_1),$$

et pour qu'elle soit nulle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum(Z_1y_1 - Y_1z_1) = 0.$$

En appliquant ce résultat aux trois axes, on voit que les trois équations des moments, nécessaires et suffisantes pour l'équilibre quand la résultante de translation est nulle, ont précisément, dans le cas des axes obliques, les mêmes formes [107] trouvées au numéro précédent.

369. Équations d'équivalence. Soient deux systèmes équivalents de forces: $F', F'', \ldots F^{(n)}$ d'une part, $F'_1, F''_1, F'''_1 \ldots F_1^{(m)}$ d'autre part. Désignons par X, Y, Z les composantes d'une quelconque des premières forces parallèlement à trois axes coordonnés quelconques, et par X_1, Y_1, Z_1 les composantes parallèles aux mêmes axes d'une des forces du second système.

On sait que lorsque deux systèmes de forces sont équivalents, les forces de l'un des systèmes font équilibre à celles de l'autre prises en sens contraires.

Il suffit donc d'écrire que toutes les forces X, Y, Z et toutes

les forces $-X_1$, $-Y_1$, $-Z_1$ satisfont aux six équations [106] et [107] du n° 367.

On trouve ainsi que l'équivalence des deux systèmes de forces s'exprime par les six équations suivantes:

$$\sum X_1 = \sum X, \quad \sum Y_1 = \sum Y, \quad \sum Z_1 = \sum Z,$$
$$\sum(Z_1 y_1 - Y_1 z_1) = \sum(Zy - Yz),$$
$$\sum(X_1 z_1 - X_1 y_1) = \sum(Xz - Zx),$$
$$\sum(Y_1 x_1 - X_1 y_1) = \sum(Yx - Xy).$$

370. Appliquons ces formules au cas où les forces X, Y, Z, en nombre quelconque, ont une équivalente unique, c'est-à-dire une résultante dont les composantes seront X_1, Y_1, Z_1, et qui sera dirigée suivant une droite dont l'un des points aura pour coordonnées x_1, y_1, z_1. Nous aurons les six équations

$$X_1 = \sum X, \quad Y_1 = \sum Y, \quad Z_1 = \sum Z. \qquad [108]$$
$$\left.\begin{aligned} Z_1 y_1 - Y_1 z_1 &= \sum(Zy - Yz), \\ X_1 z_1 - Z_1 x_1 &= \sum(Xz - Zx), \\ Y_1 x_1 - X_1 y_1 &= \sum(Yx - Xy), \end{aligned}\right\} \qquad [109]$$

dont les trois premières fournissent l'intensité de la résultante et sa direction relativement à trois droites parallèles aux axes; et les trois dernières sont les équations des projections sur les plans des coordonnées de la droite suivant laquelle cette résultante est dirigée.

Pour que la résultante supposée existe effectivement, il faut que les trois équations [109] puissent être satisfaites simultanément. Remarquons que leurs seconds membres sont les sommes des moments des forces par rapport aux trois axes, lorsque ceux-ci sont rectangulaires. Remplaçons donc, pour abréger, ces seconds membres par M_x, M_y, M_z, puis multiplions la première équation par X_1, coefficient de $-y_1$ dans la troisième; multiplions la seconde par Y_1, coefficient de $-z_1$ dans la première; enfin, multiplions la troisième équation par Z_1, coefficient de $-x_1$ dans la seconde; faisons ensuite la somme des trois équations : le premier membre se réduit à zéro, et en remplaçant X_1, Y_1, Z_1, par les sommes qui leur sont égales, on a l'équation de condition

$$M_x\sum X + M_y\sum Y + M_z\sum Z = 0, \quad (*) \qquad [110]$$

d'où résulte cette proposition :

THÉORÈME. *Lorsqu'un système de forces a une résultante, les trois sommes algébriques des moments de ces forces par rapport à trois axes conjugués rectangulaires Ox, Oy, Oz, étant calculées en prenant le sens positif de la rotation virtuelle de Ox vers Oy, de Oy vers Oz, et de Oz vers Ox, la somme des trois produits obtenus en multipliant chaque somme de moments par la somme des projections des forces sur le même axe auquel se rapportent ces moments, se réduit à zéro.*

Il est bien entendu que, si les sommes de projections sur les axes étaient toutes trois nulles, il n'y aurait pas de résultante (362), bien que l'équation [110] fût satisfaite.

371. Réciproquement, lorsque l'équation [110] est satisfaite, sans que les sommes $\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$, soient nulles toutes trois, il y a une résultante, parce qu'on peut trouver six quantités X_1, Y_1, Z_1, x_1, y_1, z_1, qui satisfassent aux six équations [108] et [109] du n° 370.

Soit, par exemple, $\sum Z$, ayant une valeur autre que zéro : on se donnera z_1, et l'on tirera de [109]

$$y_1 = \frac{M_x + z_1\sum Y}{\sum Z}, \qquad x_1 = \frac{z_1\sum X - M_y}{\sum Z};$$

les six équations d'équivalence seront donc satisfaites.

§ 8. *Cas particuliers des couples.*

372. Il est aisé de voir que la somme des moments d'un couple (362), par rapport à un axe perpendiculaire à son plan est constante, quel que soit cet axe, et égale au produit de l'une des forces multipliée par la distance entre les deux forces. Le signe de cette somme algébrique, qui s'appelle,

(*) Par la théorie de l'élimination en algèbre, on sait que pourvu que les quantités X_1, Y_1, Z_1, ne soient pas nulles toutes trois, l'équation finale [110], prise avec deux des trois équations [109], forme un système de relations équivalent à celui de ces trois équations.

pour abréger, *le moment du couple*, est également indépendant de la position de l'axe perpendiculaire au plan du couple, et reste le même pour tous les mouvements virtuels de rotation de même sens.

Soient, par exemple, deux forces P, P' (*fig.* 47), égales, parallèles, et de sens opposés; prenons successivement leurs moments par rapport à divers axes perpendiculaires à leur plan, en supposant que le sens de la rotation soit toujours de droite à gauche par en bas.

Par rapport à B, pris à gauche des deux forces, la somme algébrique des moments est

$$P \times AB - P' \times A'B = P(AB - A'B) = P \times AA'.$$

Par rapport à C, entre les deux forces, la somme des moments est

$$P \times AC + P' \times A'C = P(AC + A'C) = P \times AA'.$$

Par rapport à D, à droite des deux forces, la somme des moments est

$$P' \times A'D - P \times AD = P(A'D - AD) = P \times AA'.$$

373. Un couple (P, — P) agissant sur un corps solide, ne peut être tenu en équilibre par une troisième force Q, car la résultante de translation des trois forces P, — P, Q, ne peut être nulle. Mais *l'équilibre peut exister entre deux couples* (P, — P), (Q, — Q) : *il suffit, pour cela, que leurs plans soient parallèles, et que leurs moments soient égaux et de signes contraires.* C'est ce que l'on voit clairement en prenant (*fig.* 48) les axes Ox, Oy, dans le plan du couple (P, — P), l'un, Ox, parallèle aux forces Q; l'autre, Oy, perpendiculaire à ces forces, et l'axe Oz, perpendiculaire aux plans des couples. Les six conditions d'équilibre sont visiblement satisfaites.

COROLLAIRE 1er. *Deux couples dont les plans sont parallèles, et dont les moments sont égaux et de même signe, sont équivalents.*

COROLLAIRE 2ème. *Un couple peut toujours être remplacé par un couple équivalent dont l'une des forces ait une intensité*

donnée et une direction donnée parallèle au plan du premier couple.

374. Réciproquement, *lorsque deux couples sont en équilibre, leurs plans sont parallèles et leurs moments sont égaux et de signes contraires.* En effet, supposant que les plans des deux couples se coupent, on peut prendre dans le plan du premier couple un axe de moments qui rencontre la commune intersection, et transporter au point de rencontre l'une des forces du second couple. Trois moments partiels sont nuls alors, mais le quatrième ne l'est pas, parce que la quatrième force ne peut ni être parallèle à l'axe, ni le rencontrer. Donc, dans le cas d'équilibre, les plans sont parallèles. L'égalité des moments est une conséquence immédiate de l'une des six conditions de l'équilibre.

375. Théorème. *Tant de couples qu'on voudra, appliqués à un corps solide, peuvent, s'ils ne se détruisent pas, se réduire à un seul;* car leur résultante de translation étant nulle, ils peuvent être remplacés par deux équivalentes dont la résultante de translation est nulle (359), c'est-à-dire, par un couple.

376. *Un système de forces peut toujours se réduire à un système équivalent composé d'une force passant par un point donné et d'un couple.* En effet (360) on peut le réduire à deux équivalentes S, T, la première passant en un point O choisi arbitrairement. Appliquons à ce point O deux forces T_1 et $-T_1$, directement opposées entre elles, égales et parallèles à T. Les forces S et T_1 peuvent se composer en une seule R; les deux autres, $-T_1$ et T, formeront un couple : c'est ce qu'il fallait démontrer.

On voit, 1° que la force R est égale à la résultante de translation, et peut s'appliquer en un point quelconque O, en modifiant convenablement le couple; 2° que, pour un même point O, choisi arbitrairement, comme se trouvant sur la direction de la force R, tous les couples qui peuvent à volonté remplacer T et $-T_1$, sont équivalents, c'est-à-dire, qu'ils sont dans des plans parallèles, et qu'ils ont des moments égaux et de même signe.

§ 9. *Cas particulier des forces situées dans un plan.*

377. Si autant de forces qu'on voudra, appliquées à un corps solide, sont dans un même plan, ce fait équivaut à trois des conditions d'équilibre, et il ne reste qu'à vérifier les trois autres. En effet, qu'on prenne les axes Ox, Oy dans le plan qui contient toutes les forces ; les moments par rapport à ces axes seront nuls, et si l'on choisit l'axe Oz perpendiculaire à ce même plan, la somme $\sum F_z$ des projections des forces sur cet axe sera nulle. Les conditions qui resteront nécessaires et suffisantes seront exprimées par les équations

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum \mathfrak{M}_{Oz} F = 0.$$

La quantité $\sum \mathfrak{M}_{Oz}.F$ est la somme algébrique des moments des forces par rapport à l'axe Oz perpendiculaire au plan des forces. Dans ce cas, on dit ordinairement que les moments sont pris par rapport au point O, où l'axe perce le plan des forces.

378. Il résulte de ces mêmes considérations que les conditions d'équivalence de deux systèmes de forces situées dans un plan se réduisent à trois, savoir, deux équations de projections, et une équation de moments, qui sont :

$$\sum F_x = \sum F_{1x}, \qquad \sum F_y = \sum F_{1y}, \qquad \sum \mathfrak{M}_{Oz} F = \sum \mathfrak{M}_{Oz} F_1.$$

Parmi les systèmes de forces situées dans un plan, ceux qui se composent de trois forces méritent une étude particulière.

379. *Si trois forces sont en équilibre, elles sont dans un même plan.* Cette proposition s'appuie sur la suivante.

LEMME. *Quand trois droites* A, B, C *ne sont pas dans un même plan, il existe une infinité de droites qui, rencontrant deux d'entre elles, ne sont pas dans un même plan avec la troisième.* En effet, si des trois droites il y en a deux dans un même plan, soient A et B ces deux droites; sinon, soient A et B deux quelconques des trois droites (*fig.* 49). Dans les deux cas, soit sur A un point *a* non situé sur B ni sur C; le plan MN passant par ce point *a* et par la droite B, ne contient pas la droite C, et

parmi toutes les droites de ce plan qui concourent en a, une seule, C', est dans un même plan avec C ; une seule aussi, B', est parallèle à B ; toutes les autres rencontrent B sans rencontrer C.

Il s'ensuit que trois forces qui ne sont pas dans un même plan ne peuvent être en équilibre ; car si l'on prend un axe de moments qui, rencontrant deux d'entre elles, ne soit pas dans un même plan avec la troisième, le moment de celle-ci ne sera pas nul (122), parce que ni l'un ni l'autre de ses facteurs ne sera nul. Donc trois forces en équilibre sont dans un même plan.

Corollaire. Deux forces F', F'' qui ne sont pas dans un même plan ne peuvent avoir une résultante R, puisque son opposée — R ferait équilibre aux deux forces F', F''.

380. *Trois forces en équilibre concourent en un même point ou sont parallèles entre elles.* En effet, 1° si deux d'entre elles concourent, leur moment par rapport au point d'intersection est nul ; donc il en est de même de la troisième. 2° Si deux des trois forces sont parallèles, leur projection sur une droite perpendiculaire à leur direction est nulle ; donc il en est de même de la troisième.

381. L'équation des moments $\sum \mathfrak{M}_{o_1} F = o$ appliquée à trois forces en équilibre prouve que si d'un point situé sur l'une des forces on abaisse des perpendiculaires sur les deux autres, ces perpendiculaires sont réciproquement proportionnelles aux deux forces.

382. Les questions relatives à l'équilibre de trois forces peuvent se ramener à la considération de la résultante de deux de ces forces, laquelle doit être égale et opposée à la troisième force.

Problème. *Trouver la résultante de deux forces dans un plan.* 1° Si les deux forces concourent, on détermine leur résultante au moyen du parallélogramme des forces, soit géométriquement, soit par le calcul immédiat (207) ou par l'emploi des projections sur deux axes (204).

2° Si les deux forces sont parallèles, supposons d'abord qu'elles agissent dans le même sens, que leurs intensités soient

représentées par F′, F″, et que la distance qui les sépare soit désignée par a. Appelons R l'intensité de la résultante, et x' sa distance à la force F′ (*fig.* 50).

Si l'on prend les axes de projections, dans le plan des forces, l'un perpendiculaire, l'autre parallèle à ces forces, et l'axe O des moments perpendiculaire à leur plan et rencontrant F′ en O, on satisfait aux trois conditions d'équivalence (378) en prenant R *parallèle à ses composantes, dans le même sens*, et en posant

$$R = F' + F'' \qquad \text{et} \qquad Rx' = F''a,$$

d'où il résulte que x' est plus petit que a, et que par conséquent la résultante R est située entre les deux forces.

Si l'on prenait l'axe des moments sur la résultante, en appelant x'' sa distance à la force F″, l'équation des moments deviendrait

$$F'x' = F''x'',$$

relation comprise dans les deux précédentes, d'où on la tire en éliminant R et en remplaçant $a - x'$ par x''. Ainsi *la résultante de deux forces parallèles de même sens partage l'intervalle des deux composantes en deux parties réciproquement proportionnelles à ces deux forces.* Il est évident qu'elle partage dans le même rapport toute droite joignant deux points pris respectivement sur ces deux forces.

Supposons maintenant que les deux forces parallèles F′, F″ soient dirigées en sens contraires (*fig.* 51), et que F′ soit la plus petite des deux. Prenant encore les axes de projections l'un perpendiculaire, l'autre parallèle aux forces, et l'axe des moments traversant F′, appelant a la distance de deux forces, et x' la distance de R à F′, comptée positivement en allant de F′ à F″ et au delà; on satisfait aux conditions d'équivalence (378) en *prenant* R *parallèle à ses composantes, dans le sens de la plus grande*, et en posant

$$R = F'' - F' \qquad \text{et} \qquad Rx' = F''a,$$

d'où il résulte que x' est, dans ce cas, plus grand que a, et que par conséquent la résultante est en dehors de l'intervalle des deux forces, du côté de la plus grande. Sa distance x'' à la plus grande serait donnée par l'équation des moments

$Rx'' = F'a$, et le rapport de x' à x'' serait obtenu par une troisième équation des moments $F'x' = F''x''$. Ces deux dernières équations sont implicitement contenues dans les deux précédentes, et s'en déduiraient par l'élimination de x' pour l'une, et de R pour l'autre.

383. Remarques. 1re. Un couple n'a pas de résultante, car une troisième force ne peut pas être en équilibre avec les deux forces du couple, puisque la résultante de translation du système des trois forces ne serait pas nulle. Donc les dernières formules ne sont pas applicables au cas où l'on aurait $F'' = F'$; aussi donneraient-elles $x' = x'' =$ *l'infini*.

2me. Les deux cas de la résultante de deux forces parallèles sont compris, pour toutes les hypothèses possibles, dans les deux formules trouvées d'abord

$$R = F' + F'' \qquad \text{et} \qquad Rx' = F''a,$$

en convenant de donner des signes contraires aux forces dirigées en sens opposés, et en tenant également compte, à l'aide des signes, du sens dans lequel sont portées les distances a et x', à partir du point pris sur F'.

384. Autant de forces données qu'on voudra, situées dans un plan, quand elles ne sont pas en équilibre, se réduisent à une seule équivalente ou à un couple. On trouvera aisément dans le premier cas l'intensité de la résultante; dans le second cas, on trouvera le moment du couple.

En effet, soit d'après le théorème n° 360, soit par la composition successive, les forces se réduisent à deux équivalentes, et si celles-ci ne forment pas un couple, elles ont une résultante.

En désignant alors cette résultante par R, ses projections sur deux axes rectangulaires par R_x et R_y, sa distance à l'origine par r, on a

$$R_x = \sum F_x, \qquad R_y = \sum F_y,$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \cos(R,x) = \frac{\sum F_x}{R}, \quad \cos(R,y) = \frac{\sum F_y}{R};$$

$$\pm Rr = \sum \mathfrak{M}_{oz} F, \qquad \text{d'où} \quad r = \frac{\pm \sum \mathfrak{M}_{oz} F}{R}.$$

On aura ainsi, 1° l'intensité absolue de la résultante, 2° la direction d'une parallèle de même sens, 3° la distance de la résultante au point choisi pour origine, 4° le signe ou sens de son moment, ce qui achèvera de déterminer complétement la résultante cherchée.

Si les équivalentes forment un couple, on a $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, et la quantité $\sum \mathfrak{M}_o F$ est le moment du couple équivalent, dont la position est d'ailleurs arbitraire dans le plan des forces ou dans tout autre plan parallèle (373).

385. Théorème. *Si les forces qui sollicitent un corps solide se réduisent à deux systèmes de forces situées dans deux plans parallèles, il faut pour l'équilibre que la résultante de translation de chaque système soit nulle.*

En effet, 1° si aucune des résultantes de translation n'était nulle, chaque système aurait une résultante ; toutes les forces se réduiraient à deux non directement opposées : il n'y aurait pas équilibre (364).

2° Si une des résultantes de translation était nulle, l'autre ne l'étant pas, toutes les forces se réduiraient soit à une force unique, soit à un couple et une force ; il n'y aurait donc pas équilibre (373).

Ainsi ce cas d'équilibre est celui de l'équilibre de deux couples (373), à moins que les forces de chaque plan ne soient séparément en équilibre.

§ 10. *Cas particulier des forces parallèles dans l'espace.*

386. Si autant de forces parallèles qu'on voudra sont tenues en équilibre par une autre force, cette dernière leur est parallèle; car sa projection sur tout axe perpendiculaire à la direction des premières forces est nulle (348).

387. Si autant de forces qu'on voudra, appliquées à un corps solide, sont parallèles, ce fait équivaut à trois des conditions d'équilibre, et il ne reste qu'à vérifier les trois autres. En effet, si l'on prend l'axe Oz parallèle aux forces, et les axes Ox, Oy perpendiculaires à Oz, les projections sur Ox et Oy seront nulles, et les moments par rapport à Oz le seront aussi. Les

conditions qui restent nécessaires et suffisantes pour l'équilibre consistent dans la nullité de la somme algébrique des projections sur l'axe Oz, et des sommes des moments par rapport aux axes Ox, Oy.

Si l'on convient, 1° de représenter par F l'une quelconque des forces, prise avec le signe + ou —, selon qu'elle sera dans le sens Oz ou en sens contraire; 2° de prendre les axes Ox, Oy perpendiculaires entre eux, et de représenter par x, y les coordonnées positives ou négatives d'un point quelconque de la droite suivant laquelle agit la force F; les trois conditions à vérifier seront exprimées par les équations

$$\sum F = 0, \qquad \sum Fx = 0, \qquad \sum Fy = 0; \qquad [111]$$

c'est ce qu'il est facile de reconnaître, en faisant sur le sens et la position de la force F toutes les hypothèses possibles.

388. Si les forces parallèles ne satisfont pas aux trois conditions précédentes [111], elles se réduisent à un couple ou à une résultante unique, suivant que $\sum F$ est ou n'est pas nulle. C'est à quoi conduiraient évidemment les compositions successives faites d'après les règles établies au n° 382, 2ᵉ partie.

1ᵉʳ CAS. $\sum F = 0$. En supposant le système réduit à deux équivalentes parallèles aux z, l'une S, suivant l'axe Oz, l'autre T, ayant x_1 et y_1 pour coordonnées d'un quelconque de ses points, on aura (365)

$$S + T = 0, \qquad Tx_1 = \sum Fx, \qquad Ty_1 = \sum Fy;$$

trois équations pour quatre inconnues. Le problème est indéterminé, et doit l'être, puisqu'un couple peut être remplacé par un autre, même sans changer la direction de l'une des forces. Le plan du couple sera déterminé par le rapport $\frac{y_1}{x_1} = \frac{\sum Fy}{\sum Fx}$, et son moment par la quantité

$$T\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(\sum Fx)^2 + (\sum Fy)^2}.$$

Enfin, on pourra donner à T le sens et le signe qu'on voudra, pourvu qu'on fasse S de sens opposé, et qu'on donne alors à x_1 et y_1 les signes qu'exigent les équations

$$Tx_1 = \sum Fx, \qquad Ty_1 = \sum Fy.$$

2ᵉ CAS. Si $\sum F$ diffère de zéro, les deux équivalentes parallèles ont une résultante. En appelant R cette résultante, et x_1, y_1, les coordonnées d'un quelconque de ses points, on aura (365), dans les trois équations

$$R = \sum F, \qquad Rx_1 = \sum Fx, \qquad Ry_1 = \sum Fy,$$

la solution d'un problème déterminé, qui comprend, comme cas particulier, celui de la composition de deux forces parallèles.

389. Connaissant les positions d'autant de points qu'on voudra par lesquels passent des forces *parallèles*, d'intensités connues et de même sens, on peut, sans connaître la direction de ces forces, assigner un point par lequel passe nécessairement leur résultante.

Cela est déjà établi (382) pour deux forces F', F''; car, si l'on appelle M', M'' deux points pris sur leurs directions, la résultante R'' de ces deux forces passe en un point N'' situé sur la droite $M'M''$, et partageant cette droite en parties réciproquement proportionnelles aux forces. De même la résultante R''' de R'' et d'une troisième force F''', passant par M''', passe en un point N''' qui partage la droite $N''M'''$ en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces $F' + F''$ et F'''.

En procédant ainsi de suite, on arrivera, sans connaître la direction des forces, à trouver un point N, par lequel passe nécessairement leur résultante.

Ce point s'appelle le *centre des forces parallèles* dont il s'agit.

Si F représente une quelconque des forces du système, x la distance de son point d'application à un plan quelconque, X la distance au même plan du centre des forces parallèles, on peut, sans changer la position de ce point, supposer les forces parallèles au plan considéré, et l'on a par conséquent, comme au numéro précédent,

$$R = \sum F, \quad RX = \sum Fx, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{\sum Fx}{\sum F}.$$

En opérant de même par rapport à deux autres plans, on aura

$$Y = \frac{\sum Fy}{\sum F}, \qquad Z = \frac{\sum Fz}{\sum F}.$$

Ainsi l'on aura les trois coordonnées du centre des forces parallèles, en fonction de celles de leurs points d'application.

Il est facile de voir que la même propriété et les mêmes formules subsistent lorsque les forces parallèles se partagent en deux groupes de sens opposés.

390. Lorsque les forces parallèles sont les poids de points matériels dont se compose un corps solide, le centre de ces forces n'est autre chose que le *centre de gravité* du corps; car on peut, dans les formules ci-dessus, substituer aux forces F ou aux poids des points matériels, leurs masses qui leur sont proportionnelles, et les formules sont alors celles du n° 95.

De là un moyen de déterminer expérimentalement le centre de gravité d'un corps solide, soit en le suspendant par deux points différents, ce qui fournit deux droites, dont l'intersection est le centre cherché, soit en posant le corps en équilibre sur un couteau horizontal, et en répétant l'expérience en divers sens, ce qui fournit plusieurs plans contenant le point dont il s'agit.

§ 11. *Attraction mutuelle de deux sphères formées de couches homogènes.*

391. La proposition suivante trouve son application dans la physique, et se déduit de la propriété fondamentale de la résultante de plusieurs forces concourantes.

THÉORÈME. *Deux sphères matérielles, composées de couches homogènes, dont tous les points s'attirent en raison directe de leurs masses et en raison inverse du quarré de leur distance, exercent l'une sur l'autre des forces dont la résultante est la même que si la matière que chacune d'elles contient était réunie en son centre.*

Pour le démontrer, considérons d'abord l'attraction d'une couche sphérique homogène, dont le centre est O (*fig.* 52), sur un point matériel situé en A hors de cette couche.

Soit i l'épaisseur très-petite de la couche, et soit r son rayon; son volume sera $4\pi r^2 i$.

Soit f l'attraction qu'exerceraient l'un sur l'autre deux

points matériels ayant l'unité de masse et situés à un mètre de distance l'un de l'autre. Soit m la masse du point matériel situé en A. Soit μ la masse de la couche sous l'unité de volume, de sorte que sa masse totale est

$4\pi r^2 i\mu$, que nous désignerons par M.

Si l'on désigne par α l'aire d'une très-petite portion de la couche, et par z sa distance au point A, son volume est αi, sa masse $\mu\alpha i$, et sa force attractive sur A est, d'après la loi exprimée dans l'énoncé, $\frac{fm\mu\alpha i}{z^2}$.

La résultante de toutes les forces pareilles pour une zone entière quelconque, comprise entre deux plans MM_1, $M'M'_1$, perpendiculaires à OA, étant évidemment dirigée suivant AO, sera (204) égale à la somme des projections sur cet axe des forces élémentaires. La projection sur AO de $\frac{fm\mu\alpha i}{z^2}$ est $\frac{fm\mu\alpha i x}{z^2 . z}$, en appelant x la distance AP, projection du rayon AM.

La somme des valeurs de cette quantité pour tous les éléments α qui forment la zone décrite par l'arc très-petit MM', donnera l'attraction de cette zone, et s'obtient (puisque tous ces éléments α ont le même x et le même z) en mettant pour α la surface de cette zone, savoir, $2\pi r dx$, en faisant $PP' = dx$. Cette attraction est donc

$$2fm\pi ri\mu . \frac{x}{z^3}\, dx \qquad \text{ou} \qquad f\frac{mM}{2r} . \frac{xdx}{z^3}, \qquad [112]$$

en mettant M à la place de $4\pi r^2 i\mu$.

Cette quantité exprime également la résultante des actions du point A sur la zone solide $MM'M'_1M_1$, puisque toutes ces actions sont respectivement égales et opposées aux composantes de l'action de la zone sur le point A.

L'intégration de l'expression ci-dessus donnera la force totale exercée par la couche sphérique sur le point A, et réciproquement la résultante des actions du point A sur la couche sphérique.

Les variables x, z étant fonction l'une de l'autre, il faut en

éliminer une. Or on a $r^2 = a^2 + z^2 - 2ax$, en appelant a la distance OA, d'où

$$x = \frac{z^2 + a^2 - r^2}{2a} \qquad \text{et} \quad dx = \frac{zdz}{a}.$$

L'expression ci-dessus de l'attraction de la zone [112] devient donc

$$\frac{fmM}{4ra^2}\left(dz + (a^2 - r^2).\frac{dz}{z^2}\right),$$

dont l'intégrale indéfinie est

$$\frac{fmM}{4ra^2}\left(z - \frac{a^2 - r^2}{z}\right) + C. \qquad [113]$$

Si le point A est extérieur, comme dans la figure 52, l'intégrale définie doit être prise entre les limites $z_0 = a - r$ et $Z = a + r$.

L'intégrale indéfinie étant de la forme $\varphi(z) + C$, l'intégrale définie, ou la force cherchée, est $\varphi(Z) - \varphi(z_0)$, ou

$$\frac{fmM}{4ra^2}\left(a + r - \frac{a^2 - r^2}{a + r} - (a - r) + \frac{a^2 - r^2}{a - r}\right),$$

se réduisant à $\frac{fmM}{a^2}$: on voit qu'elle est la même que si toute la matière de la couche était réunie au centre O.

Le théorème proposé est donc démontré pour le cas où l'une des sphères se réduit à une couche très-mince, et l'autre à un point matériel extérieur.

392. Corollaire. Un corps composé de couches sphériques homogènes, dont tous les points attirent un point extérieur en raison inverse du quarré des distances, exerce sur ce point la même action que si toute la matière était réunie au centre; et, suivant la remarque faite plus haut, il en est de même de la résultante des forces que le point extérieur exerce sur le corps sphérique.

393. Si le point A était intérieur, l'analyse précédente s'appliquerait encore, sauf les limites de l'intégrale [113], qui seraient $r - a$ et $r + a$. Cette intégrale serait donc

$$\frac{fmM}{4ra^2}\left(r + a + \frac{r^2 - a^2}{r + a} - (r - a) - \frac{r^2 - a^2}{r - a}\right),$$

se réduisant à *zéro*.

Donc, dans la même loi d'attraction, l'action du corps composé de couches sphériques homogènes sur tout point situé à l'intérieur, se réduit à l'action de la matière enveloppée par la surface sphérique qui passe par le point intérieur; car ce point devient extérieur par rapport à cette sphère, tandis que l'action de toutes les couches qui l'enveloppent est nulle.

394. Cette dernière proposition se démontre par des considérations géométriques. Soit pris pour plan de la figure 53 un plan quelconque passant par OA; soit MN un arc infiniment petit dans ce plan; soit MP la perpendiculaire abaissée sur OA. La surface de la zone décrite par MN tournant autour de OA sera $MN \times 2\pi MP$; mais si l'arc, au lieu d'une révolution entière, n'en fait qu'une très-petite fraction exprimée par $\frac{1}{n}$, l'aire décrite sera $\frac{2\pi}{n} . MN \times MP$, et comme elle sera infiniment petite en tous sens, on pourra prendre AM pour sa distance au point A. Donc la force attractive correspondante à cette portion de la couche, dont l'épaisseur très-petite est i, aura pour intensité

$$f m\mu i \frac{2\pi}{n} . \frac{MN \times MP}{AM^2} .$$

Soient prolongées les droites MA, NA jusqu'en M', N'. L'arc M'N', pendant le petit mouvement de rotation ci-dessus défini, décrira également une petite portion de zone dont l'attraction sur le point A aura l'intensité exprimée par

$$f m\mu i \frac{2\pi}{n} . \frac{M'N' \times M'P'}{AM'^2} .$$

Or, on prouve facilement que cette seconde quantité est égale à la première : les triangles semblables AMN, AM'N' donnent $\frac{MN}{AM} = \frac{M'N'}{AN'}$, ou en remplaçant AN' par AM', attendu que leur rapport diffère aussi peu qu'on veut de l'unité, $\frac{MN}{AM} = \frac{M'N'}{AM'}$; on a aussi, évidemment, $\frac{MP}{AM} = \frac{M'P'}{AM}$; et ces deux dernières

équations, multipliées l'une par l'autre, donnent

$$\frac{MN \times MP}{AM^2} = \frac{M'N' \times M'P'}{AM'^2}.$$

Donc les attractions dont il s'agit étant égales et opposées se détruisent, d'où on conclura qu'il en est de même pour toute l'étendue de la couche sphérique.

395. Remarque. Si la terre était sphérique et homogène, son attraction, sur un point intérieur, serait directement proportionnelle à la distance de ce point au centre, tandis que son attraction sur un point extérieur serait réciproquement proportionnelle au quarré de la distance au centre. En effet, dans le cas du point intérieur, il faudrait, dans la formule $\frac{fmM}{a^2}$, faire M variable et proportionnelle au cube de a, tandis que lorsque le point est extérieur la masse M est constante.

396. Soient maintenant deux sphères situées extérieurement l'une à l'autre, et composées de couches homogènes; soient M et M' leurs masses totales, O et O' leurs centres à la distance a.

L'action de la première sphère sur chaque point matériel de la seconde est la même que si la masse M était réunie en son centre O; son action totale sur la seconde sphère est donc égale à celle qu'exercerait sur cette seconde sphère un point situé en O et ayant la masse M. Mais, dans ce cas, cette action résultante est exprimée par $\frac{fMM'}{a^2}$, comme si la masse M' de la seconde sphère était aussi réunie en son centre O'.

C'est ce qui démontre le théorème énoncé au commencement du n° 391.

CHAPITRE III.

EMPLOI DE LA STATIQUE DANS LES QUESTIONS DE DYNAMIQUE.

§ 1er. *Équilibre fictif des forces réelles et des forces d'inertie pendant le mouvement d'un corps quelconque.*

397. Dans un système matériel quelconque en mouvement, chaque point se meut sous l'action de forces qui sont, les unes extérieures F, les autres intérieures mutuelles f. Ces forces réelles ont à chaque instant, pour chaque point M, une résultante qui s'appelle *force totale* pour ce point, et que nous désignerons par φ.

Les relations de cette résultante, avec le mouvement du point dont il s'agit, sont celles qui ont été établies dans la deuxième section. Ainsi, en appelant m la masse du point considéré, v sa vitesse à un instant quelconque terminant le temps t, ρ le rayon de courbure de l'arc qu'il décrit à cet instant (*), il résulte des théorèmes précédemment démontrés

1° Que la force φ peut se décomposer en deux forces, l'une tangentielle ψ, l'autre centripète χ, satisfaisant aux équations

$$\psi = m\frac{dv}{dt}, \qquad \chi = \frac{mv^2}{\rho};$$

2° Que, si l'on projette le mouvement du point M sur un axe quelconque Ox, on a, suivant les notations convenues,

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\varphi_x}{m}.$$

(*) Il ne faut pas confondre le rayon ρ avec la distance du point M à l'axe instantané de rotation (51,3°) si le système est solide.

On sait que v_x est la même chose que $\frac{dx}{dt}$, x étant l'abscisse variable du point M. L'expression $\frac{dv_x}{dt}$ équivaut donc à $\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}$, expression qu'on remplace ordinairement par $\frac{d^2x}{dt^2}$, et l'équation précédente devient

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x.$$

398. Cela posé, concevons qu'en conservant les forces extérieures F, nous appliquions à chaque point M deux forces égales et opposées, savoir, la force φ que nous venons de définir, et la force $-\varphi$, égale et contraire à φ; rien ne sera changé, ni au mouvement, ni à l'état moléculaire du système matériel. Dans cette supposition, attendu que chaque point M se meut comme s'il n'était sollicité que par la force φ, les autres forces F, f et $-\varphi$, appliquées à ce point, se font donc mutuellement équilibre, et par conséquent, en étendant cette considération à tous les points du système, on voit que l'ensemble des forces extérieures F, des forces moléculaires f, et des forces fictives $-\varphi$, est tel, que, si le système matériel, au lieu d'être en mouvement, était en repos, ce repos subsisterait sous l'action de ces trois espèces de forces.

Il en résulte qu'à un instant quelconque du mouvement d'un système matériel, quelle que soit sa constitution physique, si, pour chaque point M de ce système, on appelle φ la force totale qui seule produirait les modifications (accélération et courbure) du mouvement de ce point, les forces extérieures F, et les forces $-\varphi$, égales et opposées aux forces totales, satisfont à toutes les conditions de l'équilibre du système dans son état moléculaire actuel; de sorte que les forces moléculaires (tensions ou pressions intérieures) sont les mêmes que si le système, sans changer de figure, était en repos sous l'action des forces F et $-\varphi$, tandis que le système arrivé à son état actuel de mouvement, en vertu des forces qui ont précédemment agi sur lui, continue à se mou-

voir comme si chacun de ses points était sollicité par la force totale φ correspondante à ce point, et que les forces F et les actions moléculaires cessassent d'exister.

399. La considération de l'équilibre, pendant le mouvement des forces réelles F et f, extérieures et moléculaires, et des forces $-\varphi$ fictivement appliquées aux points matériels du système, constitue, au fond, ce qu'on appelle *le principe général de Dynamique de d'Alembert*. Son caractère est de ramener tous les problèmes de mouvement à des problèmes d'équilibre. Mais ce serait exagérer l'utilité de la méthode fondée sur cette considération, que de croire qu'elle permet de mettre en équation tous les problèmes de Dynamique, et de réduire leur solution à des difficultés d'analyse; car les conditions complètes de l'équilibre des corps, tels que la nature les présente, dépendent des lois qui déterminent les intensités des actions moléculaires; lois fort compliquées qu'on est obligé de simplifier par des hypothèses, pour les introduire dans le calcul.

400. Les forces $-\varphi$, que nous venons de considérer comme une simple conception de l'esprit, sont appelées *forces d'inertie* par plusieurs auteurs, pour qui elles sont des forces réelles. Pour comprendre sous quel point de vue cette opinion peut être soutenue, il faut remarquer qu'un point matériel M, soumis à des forces dont la résultante est φ, reçoit ces forces d'autres points matériels plus ou moins éloignés, et qu'il ne peut les recevoir sans réagir sur ces points avec des forces égales et opposées. Ces réactions, que nous éprouvons quand nous agissons sur les corps que nous touchons, constatent pour nous l'inertie de la matière. Toutes les réactions du point M considéré ont leurs directions passant par ce point, et, bien qu'elles aient des points d'applications différents, on peut théoriquement dire qu'elles ont une résultante qui est évidemment $-\varphi$. C'est cette résultante qu'on appelle *force d'inertie* : elle peut toujours se décomposer en deux forces rectangulaires, l'une tangentielle $-\psi$, égale à $-m\frac{dv}{dt}$ et agissant en sens contraire de l'accéléra-

tion, l'autre centrifuge, $\frac{mv^2}{\rho}$ agissant en sens contraire de la force centripète.

401. D'après ces explications, le principe de d'Alembert peut s'énoncer en ces termes :

Dans le mouvement d'un système matériel quelconque, il y a constamment équilibre entre les forces extérieures agissant sur le système, les actions moléculaires, et les forces d'inertie qui correspondent au mouvement varié et curviligne des divers éléments du système.

On verra, dans la septième section, des applications de ce principe, ou plutôt de cette remarque.

§ 2. *Propriétés des forces équivalentes dans le mouvement d'un corps solide.*

402. Théorème. *On ne change rien au mouvement d'un corps solide, si l'on remplace les forces extérieures* F *qui le sollicitent par des forces équivalentes* F_1.

En effet, quel que soit le mouvement nécessairement déterminé qui a lieu à partir d'un état initial donné du système, chaque point se meut comme s'il était sollicité uniquement par une certaine force φ; imaginons que nous appliquions à tous les points du système, tout à la fois les forces φ et leurs opposées $-\varphi$, rien ne sera changé; seulement les forces F et $-\varphi$ seront en équilibre, ou, comme on le dit, se détruiront, tandis que les forces φ produiront, en vertu des vitesses initiales, toutes les circonstances du mouvement. Or, si, dans cet état, on remplace les forces F par leurs équivalentes F_1, le système étant supposé parfaitement solide, l'équilibre avec les forces $-\varphi$ subsistera, par suite des modifications que subiront les actions moléculaires; donc tous les points continueront d'obéir aux forces φ, comme si ces points séparément étaient libres : donc il n'y aura rien de changé au mouvement.

403. Corollaire. *On ne change rien au mouvement d'un*

corps solide, si l'on ajoute ou qu'on supprime des forces en équilibre.

404. Remarques. 1° On définit quelquefois l'équivalence des forces, en disant que deux groupes de forces F, F_1, sont équivalents, lorsque appliqués l'un au lieu de l'autre, à un corps solide, ils produisent le même mouvement. C'est faire une pétition de principe, puisque c'est supposer que deux systèmes de forces qui pourraient être substitués l'un à l'autre, sans changer l'état d'équilibre, s'il existait, jouissent de la même propriété dans l'état de mouvement.

405. 2° Il faut bien remarquer que cette propriété est fondée sur l'hypothèse de la solidité du système matériel, et que le remplacement de certaines forces F, par des équivalentes F_1, change les actions moléculaires. Si, par exemple, dans une barre prismatique, on introduit deux forces égales et opposées, appliquées aux deux bases, on modifie l'état de tension ou de compression de ce corps.

406. Du théorème du n° 402, et de celui du n° 376, il résulte qu'un corps solide sous l'action des forces quelconques F se meut à chaque instant comme s'il était sollicité par une force égale à la résultante de translation des forces F, appliquée en un point qu'on peut choisir arbitrairement, et par un couple dont le moment et la direction dépendent des forces F et du choix du point d'application de la résultante de translation.

§ 3. *Du mouvement le plus général d'un corps solide.*

407. Quel que soit le mouvement d'un corps soumis à des forces extérieures F, constantes ou variables, on a vu (283 et 284) que les modifications du mouvement du centre de gravité ne dépendent que de la résultante de translation et de la masse totale du corps. En supposant qu'on ait calculé d'après ce principe la situation à chaque instant du centre de gravité d'un corps, il ne reste plus, pour connaître le mouvement du corps dans toutes ses parties, qu'à déterminer son mouvement relatif à des axes mobiles qui se transporteraient parallèlement

à eux-mêmes en passant constamment par le centre de gravité. Ce mouvement relatif, dans le cas où le corps est solide, est un mouvement de *rotation* autour du centre de gravité, puisque ce centre est considéré comme fixe et que ses distances aux divers points du corps sont alors constantes ; mais il est possible que chaque point ne décrive pas un cercle.

408. D'après le n° 296, le mouvement relatif dont nous venons de parler pourra être traité comme un mouvement absolu, si à chaque point du corps dont la masse est m on applique, en outre des forces extérieures réelles F, une force $-F_e$ égale et directement opposée à la force d'entraînement. Or toutes les forces ainsi introduites étant parallèles et proportionnelles aux masses (puisque les axes mobiles ont un mouvement de translation), et le corps étant solide, toutes ces forces ont une résultante qui passe par le centre de gravité et qu'on peut leur substituer (402). Dans le mouvement relatif considéré comme absolu, le centre de gravité est fixe; donc cette résultante est sans influence sur le mouvement de rotation, et il ne reste pour le produire que les seules forces réelles F. C'est ce qui établit la proposition suivante :

Théorème. *Le mouvement de rotation d'un corps solide autour de son centre de gravité, relativement à des axes qui, passant par ce point, restent constamment parallèles à leurs directions initiales, est celui qui aurait lieu si le centre de gravité était fixe, les forces extérieures hors de ce point restant les mêmes qu'elles sont.*

Cette proposition et celle du n° 283 s'expriment souvent d'une manière abrégée en disant : *le centre de gravité d'un corps solide se meut comme si toutes les forces y étaient transportées, et le corps tourne autour de ce point comme s'il était fixe.*

QUATRIÈME SECTION.

HYDROSTATIQUE OU CONDITIONS DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

§ 1. *Propriétés caractéristiques des fluides.*

409. Un *fluide* est un assemblage, en apparence continu, de points matériels qui cèdent à de très-faibles efforts tendant à les séparer ou à les faire glisser les uns sur les autres. On distingue les fluides en *liquides* et en *gaz* ou fluides *aériformes*. Les liquides ne se compriment que sous des pressions extrêmement grandes, et s'appellent souvent par cette raison fluides *incompressibles*. Les gaz ou fluides aériformes sont compressibles et doués, dans certaines limites, d'une parfaite élasticité; c'est pourquoi on les nomme aussi fluides *élastiques*.

410. Le caractère essentiel de la *fluidité parfaite*, dans les liquides comme dans les gaz, consiste dans l'absence de tout frottement, soit entre les parties du fluide, soit entre elles et les corps environnants. Cette propriété n'existe pas d'une manière absolue dans la nature, mais on peut l'admettre comme une approximation conforme à l'expérience, surtout quand il s'agit de fluides en repos, ou n'ayant que des mouvements lents relativement aux corps qui les touchent.

411. De ce principe fondamental en hydrostatique se déduit, comme *conséquence nécessaire*, une autre propriété que, dans les traités sur cette matière, on regarde communément comme un résultat d'expérience; savoir :

La pression rapportée à l'unité de surface pour chaque point du fluide est égale en tous sens.

Pour s'en former une idée précise, il faut définir ce que l'on entend par la *pression* en un point d'un corps fluide. Un corps de ce genre étant supposé enfermé de toutes parts dans une enveloppe polyédrique, si l'on considère une portion plane de

cette enveloppe, on voit qu'elle reçoit de la part du fluide une infinité de petites forces agissant du dedans au dehors ; si le fluide est parfait, la résultante de ces forces, qui constitue la pression totale supportée par la portion d'enveloppe considérée, est toujours perpendiculaire à cette surface, tandis que s'il s'agit d'un liquide plus ou moins visqueux, les actions qu'il exerce peuvent être obliques à l'enveloppe comme dans le frottement des corps solides entre eux.

Si en subdivisant la surface pressée, en parties de plus en plus petites, on trouve que la pression totale sur chaque partie décroît dans le même rapport, on peut dire que la pression est *uniforme;* et si l'on divise une pression totale évaluée en kilogrammes, par l'aire qui la supporte, exprimée en son rapport au mètre quarré, on a, pour la surface dont il s'agit, ce qui s'appelle la pression par mètre quarré ou la pression rapportée au mètre quarré.

Si les pressions sur les subdivisions de la surface pressée ne sont pas proportionnelles aux aires, le quotient de la pression totale divisée par l'aire totale donne la *pression moyenne* par mètre quarré; et la limite dont on s'approche en appliquant ce calcul à une aire de plus en plus petite dans laquelle se trouve un point déterminé, est en ce point *la pression par mètre quarré.*

Cette notion s'applique à un point intérieur d'un fluide. Si par ce point on imagine *une portion* de plan, les deux parties adjacentes du fluide exercent des actions mutuelles qu'on peut se représenter comme les pressions égales que supportent les deux faces de ce plan ; l'une de ces pressions divisée par l'étendue superficielle sur laquelle elle s'exerce est la *pression moyenne*, et la limite de la pression moyenne à mesure qu'on réduit cette étendue en y comprenant toujours le point considéré, et en conservant au plan sa direction, est la pression par unité de surface au point dont il s'agit, et *perpendiculairement* à la direction adoptée.

Cela posé, l'*égalité de pression en tous sens pour un même point*, consiste en ce que la pression par unité de surface en un point pris arbitrairement dans un fluide est la même en quelque sens qu'on la considère, c'est-à-dire quelque direction qu'on

donne à la petite portion de plan dont nous venons de parler, pourvu qu'elle comprenne toujours le même point.

Pour le démontrer, faisons passer par ce point M (*fig.* 54) deux plans quelconques MM'N, MM'L, et menons dans ces plans, perpendiculairement à leur intersection, les quatre droites MN, M'N', ML, M'L', égales entre elles et à la longueur MM' prise sur l'intersection. Considérons le fluide contenu dans le prisme droit triangulaire MLNM' ainsi déterminé. Les forces *extérieures* sous l'action desquelles il est en équilibre consistent 1° dans les pressions *normales* exercées sur les cinq faces, 2° dans les actions analogues à celle de la pesanteur qui sollicitent toutes les molécules de la portion du fluide considérée. Mais à mesure qu'on diminue dans un même rapport les dimensions MM', MN, ces dernières forces deviennent aussi petites qu'on veut relativement aux pressions sur les faces, parce que les unes deviennent proportionnelles au volume du prisme et par conséquent au cube de MM', tandis que les autres deviennent proportionnelles au quarré de cette même longueur. Supposons, par exemple, que MM', MN', etc., déjà très-petites, soient rendues encore dix fois plus petites : la face MN' étant réduite à un 100me de son aire, sa pression est diminuée à peu près dans le même rapport; le poids du prisme devient à peu près un 1000me de ce qu'il était; le rapport de ce poids à la pression sur MN' se trouve approximativement dix fois plus petit; il décroît donc à peu près proportionnellement aux dimensions du prisme. Concluons qu'en approchant de la limite les forces analogues à la pesanteur deviennent de plus en plus négligeables, et que par conséquent l'équilibre doit finir par exister entre les seules pressions. Or, si l'on projette ces forces sur un axe parallèle à LN, on voit que les pressions normales aux faces NL', LMN, L'M'N', disparaissent comme perpendiculaires à cet axe, et qu'il ne reste que les pressions sur les faces MN', ML', qui, faisant des angles égaux avec LN, doivent être égales pour que leurs projections le soient; et comme ces faces sont égales, il en résulte que les pressions rapportées à une même unité de surface, suivant les deux directions perpendiculaires aux plans quelconques MN', ML', sont égales.

Lorsqu'il s'agit d'un fluide aériforme, la pression est souvent appelée *force élastique;* on lui donne aussi, assez improprement, le nom de *tension*, qui devrait être exclusivement consacré à des actions mutuelles attractives.

412. Une seconde conséquence de la nullité du frottement entre les parties des fluides, c'est que dans un fluide en repos, quand les forces extérieures se réduisent à la pesanteur et aux pressions des parois environnantes, *toute couche horizontale, ou de niveau, non interrompue, a dans toute son étendue la même pression et la même densité.*

1° Elle a la même pression; car si, entre deux points quelconques, on considère dans la couche un filet prismatique horizontal, il est également pressé à ses deux extrémités, sans quoi il se mouvrait en vertu de la nullité du frottement (410). Or, si les pressions sont égales dans le sens horizontal, elles le sont dans des sens quelconques (411).

2° Une couche horizontale continue a la même densité dans toute son étendue. En effet, soient deux plans AB, A'B', très-rapprochés (*fig.* 55) : la pression dans l'étendue de chacun d'eux considéré à part est uniforme, comme nous venons de le voir. Or, la pression sur un élément m' est égale à celle qui a lieu en m augmentée du poids de la colonne verticale mm', puisqu'il n'y a pas de frottement sur les faces latérales de cette colonne; il en est de même pour une autre colonne m_1m_1'; ces deux colonnes ont donc même poids, sous le même volume, d'où résulte la proposition énoncée.

Si la couche est discontinue, il peut en être autrement : lorsque deux vases communiquent entre eux, il peut se faire que l'égalité de pression et de densité n'ait lieu que dans les couches qui s'étendent sans interruption dans ces vases; telle est la couche AB ou la couche CD; tandis que la pression et la densité peuvent être inégales quand on passe de la couche AB à la couche *ab* située au même niveau.

413. Lorsqu'il s'agit d'un fluide incompressible et homogène, en repos, la différence des pressions par mètre quarré, en deux plans horizontaux différents, a une expression simple, pourvu qu'on puisse passer d'un plan à l'autre sans sortir

du liquide. Si h est la distance verticale des deux plans, et si Π est le poids d'un mètre cube de liquide, la différence dont il s'agit est Πh; de sorte qu'en désignant par $\mathfrak{P}_0$ la pression par unité de surface dans le plan supérieur, et par $\mathfrak{P}$ la quantité analogue dans le plan inférieur, on a

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \Pi h. \qquad [114]$$

En effet, supposons d'abord que les deux plans soient disposés comme A_0B_0 et $A'B'$ (*fig.* 56), de manière qu'on puisse descendre de l'un à l'autre suivant une colonne liquide verticale $m'n'$, dont nous appellerons la hauteur h'. Désignons par a l'aire de la section droite de cette colonne cylindrique. La pression sur la base supérieure est $\mathfrak{P}_0 a$; la base inférieure supporte en outre le poids de la colonne liquide; lequel est $\Pi a h'$. La pression totale sur la base inférieure est donc $\mathfrak{P}_0 a + \Pi a h'$, d'où il suit que la pression par unité de surface sur cette base, et par conséquent dans le plan $A'B'$, est $\mathfrak{P}_0 + \Pi h'$.

Maintenant, quels que soient les deux plans horizontaux A_0B_0, AB, dont la distance est h, il sera toujours possible d'interposer d'autres plans $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, tels qu'on puisse aller d'un niveau au suivant par une verticale sans sortir du liquide; et en appliquant à chaque intervalle la formule précédente, on trouvera les différences successives des pressions par unité de surface, d'où l'on conclura la différence totale, conforme à la règle énoncée, entre les plans extrêmes.

Si les deux couches A_0B_0, AB, étaient au même niveau, comme AB, ab (*fig.* 55), la pression par unité de surface y serait la même, h devenant nulle, pourvu qu'on pût aller d'une couche à l'autre par une ligne telle que $qrst$ sans sortir du liquide homogène.

414. On arrive également à la formule [114] par le théorème de l'effet du travail, en admettant que, dans les mouvements lents d'un liquide, le travail total des actions mutuelles soit nul, ce qui est une conséquence de l'incompressibilité et de l'absence du frottement. Soit a_0 l'aire d'une très-petite portion de paroi A_0B_0 (*fig.* 57), et $\mathfrak{P}_0$ la pression par m. q. qui s'y exerce; soient a et $\mathfrak{P}$, les quantités analogues pour la paroi AB. Imaginons

qu'on remplace ces parois par des pistons mobiles chargés des pressions totales $\mathfrak{P}_0 a_0$, $\mathfrak{P} a$, le reste de l'enveloppe étant rendu immuable; qu'alors on augmente la force $\mathfrak{P}_0 a_0$ d'une très-petite fraction de sa valeur ; les pistons A_0B_0, AB, prennent un mouvement très-lent qu'on peut arrêter après un très-petit déplacement en supprimant la force additionnelle en A_0B_0, et en joignant une force aussi très-petite à la force résistante $\mathfrak{P} a$ qui agit en AB. Les pistons ayant ainsi parcouru les petits chemins s_0, s, appliquons le théorème de l'effet du travail, en observant que le travail des forces additionnelles, étant aussi petit qu'on veut par rapport aux autres, peut être négligé, et que la puissance vive est nulle au commencement et à la fin. Le travail sur le piston A_0B_0 est $\mathfrak{P} a_0 s_0$; sur AB, il est $-\mathfrak{P} as$ ou $-\mathfrak{P} a_0 s_0$, puisque les volumes ABCD, $A_0B_0C_0D_0$, sont égaux, à cause de l'incompressibilité, et sont exprimés l'un par as, l'autre par $a_0 s_0$. Le travail dû à la pesanteur est égal au poids du liquide occupant l'un de ces volumes, multiplié par la différence du niveau de AB au-dessous de A_0B_0 (125). Si h est cette différence, et Π le poids d'un mètre cube du liquide, le travail dont il s'agit est $\Pi a_0 s_0 h$. Enfin le travail des autres forces extérieures, c'est-à-dire des pressions exercées par les parois immobiles de l'enveloppe, est nul. L'équation de l'effet du travail est donc

$$\mathfrak{P}_0 a_0 s_0 + \Pi a_0 s_0 h - \mathfrak{P} a_0 s_0 = 0, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \Pi h.$$

415. Si dans cette formule on suppose $\mathfrak{P}_0 = 0$, c'est-à-dire que la hauteur h soit comptée à partir d'un plan où la pression est nulle, on a $\mathfrak{P} = \Pi h$, ou $h = \frac{\mathfrak{P}}{\Pi}$.

Par cette raison, si l'on divise une pression $\mathfrak{P}$ rapportée à l'unité de surface, par le poids Π de l'unité de volume d'un liquide, le quotient s'appelle *la hauteur de ce liquide représentant la pression* $\mathfrak{P}$.

416. Lorsque plusieurs liquides différents et non mélangés sont en repos dans un même vase, la condition de l'homogénéité des couches de niveau (412) subsiste, et il s'ensuit que la surface de séparation des deux liquides voisins est un plan horizontal. Mais il faut distinguer deux cas : si de deux liquides voisins l'inférieur est plus dense que le supérieur, leur

équilibre sous l'action de la pesanteur est *stable*, c'est-à-dire que si l'équilibre est dérangé par une cause accidentelle, l'état primitif tendra à se rétablir dès que cette cause cessera; dans le cas contraire, le moindre dérangement dans l'horizontalité de la surface de séparation suffira pour faire descendre le liquide le plus dense à la position inférieure.

En effet, soit ABC (*fig.* 58) la surface de séparation, et imaginons suivant cette surface un diaphragme solide, très-mince, sans pesanteur; supposons qu'en B les deux faces de cette cloison soient également pressées, ce qui devrait avoir lieu dans toute son étendue pour que l'équilibre eût lieu. $\mathfrak{P}$ étant la pression par mètre quarré en B, celle qui s'exercera en A sur la face supérieure de la cloison sera $\mathfrak{P}+\Pi h$, le poids du mètre cube du liquide supérieur étant Π, et la différence de niveau de B à A étant h (413). La pression en A sur la face inférieure de la cloison sera $\mathfrak{P}+\Pi' h$, le poids du mètre cube du liquide inférieur étant Π'. Donc, si Π' est plus grand que Π, les molécules liquides situées en A, étant plus pressées en dessous qu'en dessus, tendront à remonter au niveau de B, dès que la cloison cessera d'exister; en même temps les molécules situées, comme C, à un niveau plus élevé que celui de B tendront à y descendre. Le contraire aura lieu si Π est plus grand que Π'; la cloison supprimée, le liquide supérieur descendra en A, le liquide inférieur montera en C.

Il est clair que cette propriété s'applique à un fluide pesant quelconque dont la densité peut varier d'une couche à l'autre, soit brusquement, soit d'une manière continue.

417. Un fluide étant composé de couches de différentes densités, si, partant d'un point A_0 où la pression par unité de surface est $\mathfrak{P}_0$ pour arriver au point A où la pression est $\mathfrak{P}$, on traverse, sans sortir du fluide, diverses couches dont les poids par mètre cube sont Π', Π'', Π'''. . . et les hauteurs verticales h', h'', h'''. . ., on a

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \Pi' h' + \Pi'' h'' + \Pi''' h''' + \ldots .$$

les hauteurs h', h'', h''' . . . étant comptées positivement quand les couches sont traversées en descendant, et négativement dans le cas contraire. C'est une conséquence évidente du n° 413.

§ 2. *Appareils fondés sur les propriétés précédemment expliquées.*

418. *Presse hydraulique.* Cette machine, décrite dans les traités de physique, présente une application de la transmission de la pression et du travail (414) par l'intermédiaire d'un liquide. On remarquera que, bien qu'une petite pression en produise une très-grande, le travail moteur est toujours supérieur au travail utile, à cause du frottement.

419. *Baromètre.* La pression atmosphérique se mesure par le baromètre. h étant la hauteur barométrique, Π_M le poids d'un mètre cube de mercure à la température actuelle, la pression par mètre quarré de l'atmosphère étant désignée par $\mathfrak{P}_a$, on a $\mathfrak{P}_a = h\Pi_M$, attendu que la partie supérieure du tube étant complétement vide, la pression y est nulle. Il n'en serait pas de même si, au lieu de mercure, on employait un liquide donnant à la température actuelle uue vapeur sensible.

Si la température est $0°$, la valeur de Π_M est 13598^{kg}. Si la température centigrade de mercure est τ, sachant que le coefficient de la dilatation cubique de ce métal est $\frac{1}{5550}$; on en conclut $\Pi_M = 13598 \frac{1}{1+\frac{\tau}{5550}} = 13598\left(1 - \frac{\tau}{5550+\tau}\right)$;

d'où $$\mathfrak{P}_a = 13598^{kg}\left(1 - \frac{\tau}{5550+\tau}\right)h. \qquad [115]$$

La quantité $\left(1 - \frac{\tau}{5550+\tau}\right)h$ est la *hauteur barométrique ramenée à la température zéro.* Sa valeur moyenne au niveau de la mer est $0^m,76$; celle de $\mathfrak{P}_a$ y est donc $13598 \times 0^m,76$ ou 10334^{kg}. Nous représenterons, pour abréger, cette quantité par $\mathfrak{p}_a$, et la formule précédente deviendra

$$\mathfrak{P}_a = \left(1 - \frac{\tau}{5550+\tau}\right)\frac{h}{0,76}\mathfrak{p}_a.$$

De la différence des pressions supportées par les parois, intérieure et extérieure, du tube barométrique, il résulte que

si l'on y pratiquait un trou capillaire, l'air s'introduirait par là dans le tube, et le mercure descendrait dans la cuvette.

420. Lorsqu'un fluide élastique est contenu dans un vase clos, on peut mesurer sa pression au moyen d'un baromètre dont la cuvette est en communication avec l'intérieur du vase. Si la pression à mesurer est faible, la branche fermée du baromètre peut être courte. La formule applicable est la même que ci-dessus.

421. *Manomètres à air libre.* Quand on veut connaître de combien la pression d'un fluide occupant un espace clos diffère de celle de l'atmosphère, on mesure la différence à l'aide d'un tube appelé improprement *manomètre* (*) *à air libre* (*fig.* 59), ou par des dispositions analogues. La différence de niveau h' multipliée par le poids du mètre cube du liquide employé dans le manomètre donne la différence de pression cherchée, laquelle doit être ajoutée à la pression atmosphérique ou en être retranchée, selon le cas.

Quand la différence à constater est grande, le liquide employé est le mercure.

422. Quelquefois on se sert d'un tube plusieurs fois recourbé (*fig.* 60) contenant du mercure dans les parties inférieures, et de l'eau dans le reste du tube : si les espaces AB, CB', C'B'', C''B''', sont pleins d'eau, et les espaces BC, B'C', B''C'', B'''C''', pleins de mercure, la différence de pression par mètre quarré entre les points A et C''' est égale au poids du mètre cube de mercure multiplié par la somme des différences de niveau de B à C, de B' à C', de B'' à C'', et de B''' à C''', moins le poids du mètre cube d'eau multiplié par la somme des différences de A à B, de C à B', de C' à B'', et de C'' à B'''.

423. *Tubes piézométriques.* La pression de l'eau dans une

(*) Ce mot, dérivé du grec μανός, *rare*, ne s'applique proprement qu'au baromètre tronqué servant, comme dans les récipients des machines pneumatiques, à mesurer la *raréfaction* de l'air. L'appareil dit manomètre à air libre devrait s'appeler *piézomètre*. (Voy. note du n° 423.)

conduite peut être constatée au moyen d'un tuyau de petit diamètre (*fig.* 61), qu'on y embranche, et qui finit par s'élever verticalement. On le termine par un tube en verre dans l'étendue des variations que peut subir le sommet de la colonne d'eau. Ce tube porte un repère dont la hauteur au-dessus de la conduite a été déterminée par un nivellement. M. d'Aubuisson, qui a fait établir des appareils de ce genre à Toulouse, les a appelés *piézomètres* (*).

424. Pour mesurer une petite *différence* de pression en deux points voisins des conduites fortement chargées d'une distribution d'eau, Génieys a employé, d'après mon conseil, un appareil qu'on pourrait appeler *piézomètre différentiel.* Deux tuyaux flexibles, en plomb (*fig.* 62), s'adaptent aux conduites A, E, et à un tube recourbé en verre BCD, percé au point C d'un trou capillaire qui peut à volonté être ouvert ou fermé hermétiquement. Les robinets A, E, sont d'abord fermés, et les tuyaux de l'appareil sont pleins d'air. On ferme le trou C, et l'on ouvre les robinets A, E; l'air est refoulé par l'eau vers le point C; on veille à ce qu'il ne puisse se cantonner dans les sinuosités des tubes en plomb ; et si l'eau ne paraît pas dans les branches verticales du tube de verre, on laisse à l'air une très-petite issue en soulevant l'obturateur de l'orifice C, qu'on referme aussitôt que les deux sommets des colonnes d'eau s'élèvent au-dessus des points B, D. La différence de niveau de ces deux sommets, combinée avec celle des points A, E, donne la hauteur de liquide représentant la différence de pression cherchée. Cela résulte de ce qu'on peut négliger la différence des pressions que l'air enfermé et comprimé dans la partie BCD de l'appareil exerce aux sommets B, D des deux colonnes. On voit que les indications de cet instrument sont indépendantes des intensités

---

(*) Ce mot, dérivé du grec πίεσις, εως, *pression*, paraît très-propre à la signification que lui a attribuée M. d'Aubuisson (*Traité d'Hydraulique*, p. 249), et nous l'adoptons, quoiqu'il soit employé dans les traités de physique pour désigner un appareil servant à mesurer la *compression* des liquides.

absolues, quelquefois très-grandes, des deux pressions dont il donne la différence.

425. *Tubes de sûreté.* La figure 63 indique une disposition de flacons et de tubes, connue sous le nom d'appareil de Woulf, et fréquemment employée dans les laboratoires de chimie. Le vase A contient des substances d'où se dégage successivement une grande quantité de gaz, qui ne peut arriver dans l'atmosphère, ou dans une cloche E, qu'en passant par les tubes FG, IK, LM, en traversant les vases B, C, D, et les liquides qu'ils contiennent. En un point N du tube de communication FG est soudé un tube de sûreté à boule NPQR, dans lequel on a versé un liquide qui, dans le cas de pression égale dans les deux branches QP, QR, s'y élève à peu près à la hauteur du milieu de la boule. Aux tubulures centrales des flacons B, C, sont adaptés deux tubes droits SS′, TT′, ouverts par les deux bouts, et plongeant de cinq ou six millimètres dans le liquide de ces vases.

Deux questions se présentent sur cet appareil.

1° Connaissant les quantités h, h', h'', dont les points G, K, M, les plus bas des tubes de communication descendent au-dessous de la surface du liquide où ils sont plongés, on peut calculer quelle sera la pression du gaz dans chaque vase à l'instant où l'appareil fonctionnera régulièrement. Le gaz produit dans le vase A emplit alors le tube FG, et, repoussant le liquide du flacon B, sort par bulles à l'extrémité G ; en même temps le gaz du vase B emplit le tube IK, repousse le liquide du vase C, et sort par bulles à l'extrémité K, tandis que le gaz du flacon C chassant le liquide du tube LM s'échappe en s'élevant, soit dans l'atmosphère, soit dans la cloche E. Il résulte de là que (le poids du gaz devant être négligé, comme très-petit par rapport à celui du liquide), la pression du gaz du vase C est égale à celle du liquide du vase D au niveau du point M ; que la pression du gaz du vase B est celle du liquide au point K ; enfin, que la pression du gaz dans le vase A est égale à celle du liquide au point G. Ainsi, en supposant que dans les trois vases B, C, D, le liquide ait un même poids Π par mètre cube, si l'on désigne par $\mathfrak{P}_a$ la

pression atmosphérique qui s'exerce directement sur le liquide du vase D, par $\mathfrak{P}$ la pression rapportée au mètre quarré du gaz dans le vase C, par $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ les quantités analogues pour les vases B et A, conformément à la formule [114] du n° 413, on a

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_a + \Pi h, \qquad \mathfrak{P}' = \mathfrak{P} + \Pi h', \qquad \mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}' + \Pi h'',$$

d'où $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_a + \Pi(h' + h)$, et $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}_a + \Pi(h'' + h' + h)$.

Dans cette position des choses, on voit que le liquide du vase C, où la pression est $\mathfrak{P}$, s'élève dans le tube TT' à une hauteur égale à h; que dans le tube SS', il s'élève d'une quantité $h' + h$ représentant (415) l'excès de la pression $\mathfrak{P}'$ sur celle de l'atmosphère; qu'enfin, la différence du niveau du liquide dans les deux branches du tube PQR est égale à $h'' + h' + h$.

2° On peut se rendre compte des fonctions qui font donner aux tubes PQR, SS', TT', le nom de *tubes de sûreté*. Supposons que, par une cause quelconque, telle qu'un refroidissement, la pression vienne à diminuer dans le vase A, et à y devenir moindre que celle de l'atmosphère, tandis que la pression $\mathfrak{P}'$ subsiste dans le vase B. Si le tube PQR n'existait pas, le liquide du vase B, poussé par cette dernière pression, pourrait monter par le tube GF, et retomber dans le vase A; il y aurait alors, comme on dit, absorption. Le tube PQR empêche cet effet; l'abaissement de la pression dans le vase A fait baisser le liquide dans la branche RQ, d'où il finit par se retirer, en se tenant dans la branche QP, à une hauteur h''' (*fig.* 64), qui dépend de la capacité de la boule, un peu supérieure au volume du liquide du tube. Dans cette situation, si l'équilibre a lieu, la pression dans le vase A, que nous désignerons par $\mathfrak{P}_{,}''$ satisfait à l'équation $\mathfrak{P}_{,}'' = \mathfrak{P}_a - \Pi h'''$; elle est par conséquent moindre que la pression $\mathfrak{P}'$ du vase B, car des relations précédentes on tire

$$\mathfrak{P}' - \mathfrak{P}_{,}'' = \Pi(h''' + h' + h).$$

Il en résulte qu'à cet instant le liquide du vase B s'élève dans la branche GN d'une quantité $h''' + h' + h$; et il ne peut jamais dépasser sensiblement cette élévation; car, si la

pression du vase A baisse encore tant soit peu, l'air atmosphérique s'élève dans la branche QP, et, traversant la boule, arrive dans le vase A, où il rétablit la pression $\mathfrak{P}_{\prime}''$.

Le tube SS' joue un rôle analogue dans le cas où la pression du vase B vient à baisser. Dès qu'elle se trouve de quelque peu inférieure à celle de l'atmosphère, l'air entre par l'extrémité S, tandis que le liquide du vase C ne s'élève par le bout K dans le tube KI que d'une quantité qui, mesurée au-dessus de sa surface dans ce vase, excède de très-peu la hauteur *h*, dont il s'élève dans le tube TT'; l'absorption est donc encore évitée.

§ 3. *Relation entre le volume d'un gaz, son poids, sa température et sa pression.*

426. Si dans un fluide d'une étendue quelconque, on considère une portion dont le volume soit V, et dont le poids soit P, le quotient $\frac{P}{V}$ donne pour cette portion le ***poids moyen rapporté à l'unité de volume***. Lorsque le fluide est élastique, ce quotient est rigoureusement variable, quand on passe d'une portion à une autre; mais si, ayant choisi un point M dans l'espace occupé par le fluide, on imagine des volumes de plus en plus petits comprenant ce point, les quotients $\frac{P}{V}$ correspondants finiront, sinon par être absolument constants, du moins par approcher indéfiniment d'une limite qui sera ce que nous appellerons le ***poids rapporté à l'unité de volume*** au point M. L'unité de volume étant pour nous le mètre cube, nous dirons aussi, en langage abrégé, que cette quantité est, au point M, le poids par mètre cube, et nous la désignerons par Π, quantité qui est à très-peu près constante aux divers points d'un fluide élastique en repos dans un vase de dimensions ordinaires.

427. Pour un même gaz le poids Π, par unité de volume, est lié à sa pression $\mathfrak{P}$ par unité de surface (410) et à sa température, par une relation très-remarquable résultant de deux

lois constatées par des moyens que les traités de physique font connaître.

1° Suivant la loi de Mariotte, lorsque la pression varie, *la température restant la même, le volume, pour un poids constant d'un gaz déterminé, varie en raison inverse de la pression*, d'où il suit que *le poids par unité de volume est directement proportionnel à la pression.*

Ainsi prenant deux portions d'un même gaz ayant le même poids P, leurs volumes V et V_1 étant assez petits pour que leurs pressions φ et φ_1 soient uniformes dans l'étendue de chaque portion, ainsi que leurs poids Π et Π_1 par unité de volume, on a, si la température est la même,

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\varphi_1}{\varphi} \quad \text{ou} \quad V\varphi=V_1\varphi_1, \quad \text{d'où} \quad \frac{\Pi}{\Pi_1}=\frac{\varphi}{\varphi_1},$$

en mettant pour V et V_1 leurs expressions tirées de

$$\Pi=\frac{P}{V}, \quad \text{et} \quad \Pi_1=\frac{P}{V_1}.$$

2° Suivant la loi de M. Gay-Lussac, lorsque la température varie, *la pression restant la même, le volume correspondant à un poids constant* d'un même gaz *prend des accroissements égaux pour des augmentations égales de température.* Ainsi le volume variable est une fonction du premier degré de la température τ, et l'on peut poser, en désignant par c une constante,

$$V=c(1+\alpha\tau), \quad \text{et} \quad V'=c(1+\alpha\tau'), \quad \text{d'où} \quad \frac{V}{V'}=\frac{1+\alpha\tau}{1+\alpha\tau'};$$

en mettant pour V et V' leurs valeurs $\frac{P}{\Pi}$ et $\frac{P}{\Pi'}$, on conclut

$$\frac{\Pi'}{\Pi}=\frac{1+\alpha\tau}{1+\alpha\tau'}.$$

Le coefficient de dilatation α dépend du point de départ et de la graduation de l'échelle thermométrique. Il est d'ailleurs très-approximativement le même pour tous les fluides élastiques. En adoptant l'échelle centigrade ordinaire, on peut,

d'après les expériences de M. Regnault, faire, dans les applications usuelles,

$$\alpha = 0{,}00367.$$

Combinaison des deux lois précédentes. — Soient Π, $\mathfrak{P}$, τ, le poids par unité de volume, la pression par unité de surface et la température d'un gaz, et soient Π', $\mathfrak{P}'$, τ', ce que deviennent ces trois quantités dans une autre portion ou dans un autre état du même gaz. Imaginons un état intermédiaire dans lequel le poids par unité de volume Π_1 réponde à la première température τ et à la seconde pression $\mathfrak{P}'$.

La loi de Mariotte donne, à cause de la température commune,

$$\frac{\Pi}{\Pi_1} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'};$$

et la loi de Gay-Lussac, à cause de la pression commune,

$$\frac{\Pi_1}{\Pi'} = \frac{1+\alpha\tau'}{1+\alpha\tau};$$

d'où, en multipliant, on conclut :

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'}\,\frac{1+\alpha\tau'}{1+\alpha\tau}. \qquad [116]$$

Si l'on remplace Π et Π' par $\frac{P}{V}$ et $\frac{P'}{V'}$, on a pour le rapport des volumes V, V' de deux portions d'un même gaz, en fonction de leurs poids P, P', de leurs pressions et de leurs températures,

$$\frac{V}{V'} = \frac{P}{P'}\cdot\frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}}\cdot\frac{1+\alpha\tau}{1+\alpha\tau'}. \qquad [117]$$

428. L'équation [116] pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{\Pi(1+\alpha\tau)}{\mathfrak{P}} = \frac{\Pi'(1+\alpha\tau')}{\mathfrak{P}'},$$

il en résulte que la quantité $\frac{\Pi(1+\alpha\tau)}{\mathfrak{P}}$ est une constante, tant qu'il s'agit d'une même nature de gaz. C'est ce que nous exprimerons par la formule

$$\Pi = \frac{\mathfrak{P}}{k(1+\alpha\tau)}, \qquad [118]$$

en nous rappelant que la quantité k qui reste invariable quand la pression et la température changent pour un même gaz, varie quand on passe d'un gaz à un autre d'une nature différente.

Pour déterminer cette constante, une seule expérience suffit pour chaque espèce de gaz. On a trouvé, par exemple, que le poids par mètre cube de l'air atmosphérique est de $1^k,300$ à la température *zéro*, et sous la pression moyenne de 10334^{kg} par mètre quarré, correspondante à la hauteur barométrique $0^m,76$. Il en résulte qu'en représentant par $\mathfrak{p}_a$ cette pression, on a pour l'air, à une température et une pression quelconques, la formule

$$\Pi = 1,300 \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}_a} \frac{1}{1 + \alpha\tau}. \qquad [119]$$

429. Si l'on applique à deux gaz de différentes natures la formule [188] en donnant à k pour chaque gaz la valeur spéciale, mais invariable, qui lui convient, on arrive à cette propriété importante, que *les poids par unité de volume de deux gaz d'espèces déterminées, à des températures et des pressions égales et d'ailleurs quelconques, sont dans un rapport constant,* propriété qui suppose l'exactitude de la loi de Mariotte, et l'invariabilité du coefficient α de dilatation.

430. Les traités de physique et de chimie contiennent des tables indiquant les rapports des poids des divers gaz au poids de l'air atmosphérique, sous le même volume, sous la même pression, et à la même température. Ces nombres sont désignés sous le nom de *densités tabulaires*, qui doit rappeler que les *tables* supposent même pression et même température, et donnent, dans ce cas, non des densités proprement dites (101), mais les *rapports des densités des gaz à la densité de l'air.* Par exemple,

La densité tabulaire de l'hydrogène pur est.....	0,0691
Celle de l'hydrogène des marais, peu différente de celle du gaz d'éclairage......................	0,555
Celle de la vapeur d'eau, environ 5/8..........	0,6235
» » » d'alcool...................	1,6138
» » » d'éther sulfurique...........	2,5860
» » » de mercure	6,976

Désignons par δ la densité tabulaire d'un gaz quelconque, et la formule [119], étendue à ce gaz, devient

$$\Pi = 1{,}300 \frac{\mathfrak{P}}{p_a} \frac{1}{1+\alpha\tau} \delta. \qquad [120]$$

Le rapport $\frac{\mathfrak{P}}{p_a}$ s'appelle la pression exprimée en *atmosphères*. Lorsque la pression $\mathfrak{P}$ est déterminée par une hauteur h de mercure dans le baromètre, le rapport $\frac{\mathfrak{P}}{p_a}$ se remplace par $\frac{h}{0^m,76}$.

431. Les chimistes et les physiciens expriment quelquefois la densité d'un gaz à une température et sous une pression déterminées, en prenant pour terme de comparaison la densité de l'air à la température *zéro* et sous la pression correspondante à $0^m,76$ du mercure. Cette expression n'est encore qu'un rapport, et si on le désigne par D, il est, d'après ce qui précède, lié à la densité tabulaire δ par la relation

$$D = \frac{\mathfrak{P}}{p_a} \frac{1}{1+\alpha\tau} \delta.$$

432. La formule [120] ne s'applique pas seulement aux gaz permanents, ainsi appelés parce qu'ils ne peuvent être réduits à l'état liquide que par une énorme pression et un excessif abaissement de température; elle convient aussi bien aux vapeurs. Ainsi, par exemple, la densité tabulaire de la vapeur d'eau est d'environ 5/8, ce qui signifie que le poids par unité de volume de cette vapeur est les 5/8 de celui de l'air sous la même pression et à la même température.

La seule restriction imposée à cette formule [120], c'est que pour une nature donnée de fluide élastique et pour une température déterminée τ, la pression $\mathfrak{P}$ ne peut pas dépasser une certaine valeur sans produire une liquéfaction. A cette valeur de la pression répond la plus grande densité que puisse avoir le fluide dont il s'agit, à la température déterminée τ. On dit alors que le fluide élastique est à l'état de *saturation* correspondant à cette température. Par exemple, pour la vapeur d'eau sans mélange d'une autre matière pondérable, on a pour diverses températures les valeurs du maximum de pression et du

maximum de densité qu'indique le tableau ci-joint (*), dont les deux premières colonnes résultent de l'expérience directe, et les autres s'obtiennent par le calcul, notamment la cinquième par la formule [120].

433. MM. Arago et Dulong, à qui l'on doit les principales expériences sur la relation de la pression de la vapeur d'eau avec sa température, en ont représenté les résultats par une formule d'interpolation qui revient à celle-ci :

$$\frac{\tau - 100}{100} = \frac{1}{0,7153}\left(\sqrt[5]{\frac{\mathfrak{P}}{p_a}} - 1\right),$$

ou

$$\frac{\mathfrak{P}}{p_a} = \left[1 + 0,7153\left(\frac{\tau - 100}{100}\right)\right]^5.$$

τ étant la température en degrés centigrades, et $\frac{\mathfrak{P}}{p_a}$ la pression en atmosphères.

En mettant dans l'équation [120] la valeur de τ en fonction de $\mathfrak{P}$, tirée de la première de ces deux formules, on aurait une relation algébrique entre le poids Π par mètre cube et la pression. Mais si l'on examine avec quelque attention les nombres de la cinquième colonne, à partir de celui qui correspond à la pression de $1^{atm.}$, on voit que pour des pressions $\mathfrak{P}$ en progression arithmétique, les poids Π du mètre cube de vapeur à l'état de saturation offrent aussi des différences à peu près égales. Ainsi, pourvu qu'on n'embrasse pas de trop grandes variations de pression, on peut poser assez approximativement la formule

$$\Pi = a + b\mathfrak{P},$$

et par conséquent pour le volume d'un kilogramme de vapeur

$$\frac{1}{\Pi} = \frac{1}{a + b\mathfrak{P}};$$

bien entendu que l'espace est supposé saturé de toute la vapeur que comporte sa température. Navier (*Annales des ponts*

(*) Les nombres de ce tableau sont extraits d'une table plus étendue publiée par M. A. Morin, dans ses *Leçons de Mécanique pratique*, 3[e] partie.

PRESSIONS ET DENSITÉS DE LA VAPEUR D'EAU
DANS L'ÉTAT DE SATURATION, A DIVERSES TEMPÉRATURES.

TEMPÉRATURE au thermomètre centigr. à mercure.	PRESSION DANS L'ÉTAT DE SATURATION			POIDS correspondant du mètre cube de vapeur.	VOLUME d'un kilogr. de vapeur en mètres cubes.
	en atmosphères.	en kilogr. par mètre quarré.	en hauteur de mercure à 0°.		
°	atm.	kg.	m.	kg.	m. c.
— 20	0,0017	18	0,0013	0,0015	666,6670
— 10	0,0034	36	0,0026	0,0029	344,8280
0	0,0066	69	0,0050	0,0054	185,1850
10	0,0125	129	0,0095	0,0097	103,0930
20	0,0228	235	0,0173	0,0171	58,4795
30	0,0402	418	0,0306	0,0295	33,8982
40	0,0698	720	0,0530	0,0491	20,3666
50	0,1165	1205	0,0887	0,0797	12,5471
60	0,1905	1965	0,1447	0,1260	7,9365
70	0,3013	3112	0,2290	0,1932	5,1760
80	0,4633	4783	0,3521	0,2892	3,4578
90	0,6912	7136	0,5253	0,4196	2,3832
100	1,0	10330	0,7600	0,5913	1,6912
102,7	1,1	11363	0,836	0,6455	1,5494
105,2	1,2	12396	0,912	0,6995	1,4297
107,5	1,3	13429	0,988	0,7531	1,3279
109,7	1,4	14462	1,064	0,8064	1,2401
112,2	1,5	15495	1,140	0,8584	1,1650
114,3	1,6	16528	1,216	0,9106	1,0982
116,3	1,7	17561	1,292	0,9625	1,0390
118,0	1,8	18594	1,368	1,0147	0,9855
119,7	1,9	19627	1,444	1,0664	0,9377
121,4	2,0	20660	1,520	1,1174	0,8749
128,8	2,5	25825	1,900	1,3713	0,7293
135,1	3,0	30990	2,280	1,6201	0,6173
140,6	3,5	36155	2,660	1,8650	0,5363
145,4	4,0	41320	3,040	2,1067	0,4747
149,1	4,5	46485	3,420	2,3496	0,4256
153,1	5,0	51650	3,800	2,5860	0,3867
181,6	10,0	103300	7,600	4,8477	0,2063

et chaussées, mars 1835), et après lui M. de Pambour (*Théorie de la machine à vapeur*), ont fait usage de cette observation.

La relation très-simple

$$\Pi = 0,1 + 0,5 \frac{\mathfrak{P}}{p_a},$$

est exacte à moins de $\frac{1}{50}$ près, depuis *une* atmosphère jusqu'à *cinq*.

Si l'on veut une plus grande approximation, il faut resserrer les limites des variations de pression, et déterminer en conséquence les constantes a et b; ce qui n'offre aucune difficulté.

434. Pour qu'un espace clos soit saturé de vapeur d'une espèce déterminée, il suffit que cette vapeur soit un temps suffisant en présence du liquide de même nature qu'elle. Si, par exemple, cet espace est rempli de vapeur d'eau avec excès de liquide, il suffit de connaître la température commune du liquide et de la vapeur, pour en conclure, au moyen du tableau, la pression de cette vapeur et son poids par mètre cube. Si la température vient à augmenter et que le liquide reste en excès, la pression et la densité augmentent toutes deux, comme on le voit par le tableau, et restent indépendantes du volume. Mais si, au contraire, le liquide se vaporisait entièrement, à partir de cet instant la pression $\mathfrak{P}$ et le poids par mètre cube Π seraient des fonctions de la température τ, du volume V, et du poids P de la vapeur, fonctions données par la formule [120] et par l'équation $\Pi V = P$; alors en effet le corps gazeux est, dans ses divers degrés de dilatation, composé des mêmes molécules matérielles, et le poids P est invariable.

435. Si dans la formule [120] on fait $\tau = 0$ et $\mathfrak{P} = p_a$, en y laissant δ pour désigner la densité tabulaire d'un fluide élastique spécial, on a $1,300\,\delta$ pour le poids en kilogrammes d'un mètre cube, ou le poids en grammes d'un litre de ce fluide, à la température *zéro* et sous la pression correspondante à $0^m,76$ de mercure. Mais pour que ce résultat soit réel, il faut que le fluide considéré puisse, à la température 0°, supporter la pression atmosphérique; ainsi il est exact de dire, par exemple, qu'un mètre cube d'hydrogène pur et sec, à cette température

et sous cette pression, pèse $0^{kg},0898$. Mais ce n'est plus que par une fiction qu'on peut dire que le poids d'un mètre cube d'une vapeur à 0° et à la pression $0^{m},76$ est exprimé par $1,300\,\delta$, lorsque l'existence de cette vapeur est incompatible avec la simultanéité de la température zéro et de la pression atmosphérique (exemples : les vapeurs d'eau, d'alcool, de mercure, qui, pour exister à cette dernière pression, exigent les températures 100°, 79° et 350°).

436. *Mélange des fluides aériformes.* — Soient diverses quantités de gaz d'espèces différentes, dont les volumes, les températures et les pressions soient V', τ', $\mathfrak{P}'$, pour le premier gaz; V'', τ'', $\mathfrak{P}''$, pour le second; V''', τ''', $\mathfrak{P}'''$, pour le troisième, etc. On demande quel sera le volume V de leur mélange à la température τ, et à la pression $\mathfrak{P}$, en supposant qu'il n'y ait ni combinaison chimique, ni précipitation, ni addition de matière autre que celle des gaz considérés.

Amenons d'abord tous les gaz à la pression $\mathfrak{P}$ et à la température τ, mais sans les mêler. Appelons $V'_{,}$, $V''_{,}$, $V'''_{,}$, etc., leurs volumes dans cet état. La formule [117], en y faisant $P = P'$, attendu que le poids de chaque gaz reste constant, donne

$$V'_{,} = \frac{V'\mathfrak{P}'}{1+\alpha\tau'}\cdot\frac{1+\alpha\tau}{\mathfrak{P}}, \quad V''_{,} = \frac{V''\mathfrak{P}''}{1+\alpha\tau''}\cdot\frac{1+\alpha\tau}{\mathfrak{P}},$$

$$V'''_{,} = \frac{V'''\mathfrak{P}'''}{1+\alpha\tau'''}\cdot\frac{1+\alpha\tau}{\mathfrak{P}}, \text{ etc.}$$

Maintenant, réunissons tous les gaz par couches superposées, en conservant à chacun son volume : la somme des volumes partiels sera le volume cherché. Ainsi

$$V = \frac{1+\alpha\tau}{\mathfrak{P}}\left(\frac{V'\mathfrak{P}'}{1+\alpha\tau'} + \frac{V''\mathfrak{P}''}{1+\alpha\tau''} + \frac{V'''\mathfrak{P}'''}{1+\alpha\tau'''} + \text{etc.}\right). \quad [121]$$

Dans le cas particulier où toutes les températures primitives et la température finale seraient égales, cette formule deviendrait

$$V\mathfrak{P} = V'\mathfrak{P}' + V''\mathfrak{P}'' + V'''\mathfrak{P}''' + \text{etc.} \quad [122]$$

Si tous les volumes primitifs V', V'', V''',.... étaient égaux entre eux et au volume définitif V, on aurait

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'' + \mathfrak{P}''' + \text{etc.}$$

C'est-à-dire que *lorsqu'on réunit plusieurs quantités de gaz, toutes d'égale volume, pour n'en former qu'un tout occupant un volume égal à celui de chaque gaz partiel avant la réunion, la pression finale est la somme des pressions primitives.*

437. L'expérience, en confirmant les formules précédentes, constate deux faits importants :

1° Les gaz ou vapeurs en contact se mélangent, après un temps suffisant, de manière à former un fluide homogène.

2° Ces formules s'appliquent à un mélange de gaz et de vapeurs, sous la seule condition que ce mélange ne contienne pas plus de vapeur qu'il ne pourrait en exister dans le même espace, à la même température, si la vapeur était sans mélange (432). Cette restriction ne doit pas surprendre, car on comprendrait difficilement que la présence d'un gaz permît de dépasser le terme de saturation pour la vapeur; mais il est remarquable que l'interposition du gaz ne diminue pas la quantité de vapeur constituant la saturation, quoique le gaz augmente la pression du mélange, d'une quantité égale à la pression qu'il aurait s'il était seul dans le même espace. Ainsi, lorsqu'un gaz est en contact avec un liquide, il se forme toute la vapeur que comportent l'espace et le degré de saturation correspondant à la température; et la pression augmente de la quantité qui correspond à cet état de saturation. Seulement la formation de la vapeur est moins rapide que si elle avait lieu dans le vide.

Nous allons indiquer quelques applications des lois qui viennent d'être exposées.

438. Problèmes. I. Une certaine quantité de gaz occupe le volume V lorsque ce gaz est sec sous la pression $\mathfrak{P}$ et la température τ. Quel volume V′ occupera-t-elle sous la même pression, en contact avec un liquide dont le maximum de pression, pour la même température, est p? La formule [122] donne immédiatement

$$V'\mathfrak{P} = V\mathfrak{P} + V'p, \quad \text{d'où} \quad V' = \frac{V\mathfrak{P}}{\mathfrak{P} - p};$$

c'est-à-dire que le gaz se dilate comme si, restant sec, il ne supportait plus que la pression $\mathfrak{P} - p$.

II. Un gaz occupe le volume V′ sous la pression $\mathfrak{P}$ à la température τ, lorsqu'il est saturé d'une vapeur dont la pression à cette température est p. Quel serait, sous la même pression et à la même température, le volume du même gaz s'il était sec? On a encore la même équation qui donne

$$V = \frac{V'(\mathfrak{P} - p)}{\mathfrak{P}},$$

comme si le gaz, étant sec dans les deux cas, passait de la pression $\mathfrak{P} - p$ à la pression $\mathfrak{P}$.

III. Quel est le poids par mètre cube du mélange saturé d'un gaz et d'une vapeur, dont les densités tabulaires sont δ et δ', sous la pression $\mathfrak{P}$ et à la température τ, pour laquelle la pression de saturation de la vapeur est p?

Quant au poids par unité de volume du gaz, dans le mélange, il est ce qu'il serait, le gaz étant sec sous la pression $\mathfrak{P} - p$, c'est-à-dire [119]

$$1{,}300\,\frac{\mathfrak{P} - p}{p_a}\cdot\frac{\delta}{1 + \alpha\tau};$$

et quant au poids de la vapeur, il répond à la pression p et à la température τ; il est par conséquent

$$1{,}300\,\frac{p}{p_a}\cdot\frac{\delta'}{1 + \alpha\tau}.$$

Le poids par mètre cube du mélange est la somme de ces deux quantités :

$$\frac{1{,}300}{1 + \alpha\tau}\left(\frac{\mathfrak{P} - p}{p_a}\,\delta + \frac{p}{p_a}\,\delta'\right).$$

Par exemple, s'il s'agit de l'air et la vapeur d'eau, on a $\delta = 1$ et $\delta' = 5/8$; et cette formule se réduit à

$$\frac{1{,}300}{1 + \alpha\tau}\,\frac{\mathfrak{P}}{p_a}\left(1 - \frac{3}{8}\,\frac{p}{\mathfrak{P}}\right).$$

IV. Un gaz en présence d'un liquide occupe à la température τ et sous la pression $\mathfrak{P}$ le volume V. Quel sera son volume V′, à la température τ' et sous la pression $\mathfrak{P}'$? On suppose connues les pressions p et p' de la vapeur produite par le liquide dont il s'agit, pour les deux états de saturation correspondant aux températures τ et τ'.

Le volume V′ sera le même que si le gaz, étant sec, passait de la pression $\mathfrak{P}-\mathfrak{p}$ à la pression $\mathfrak{P}'-\mathfrak{p}'$, en même temps que de la température τ à τ'.

On a donc [117], attendu que le poids absolu du gaz ne change pas

$$\frac{V'}{V}=\frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{p}}{\mathfrak{P}'-\mathfrak{p}'}\cdot\frac{1+\alpha\tau'}{1+\alpha\tau}. \qquad [123]$$

Ici se présente une question : y a-t-il plus de vapeur, c'est-à-dire, un poids plus grand de vapeur, dans le second état que dans le premier? Les poids Π' et Π par mètre cube de la vapeur, dans ces deux états, sont les mêmes qu'ils seraient si la vapeur était sans mélange, aux températures τ' et τ, sous les pressions de saturation correspondantes. On a donc [116]

$$\frac{\Pi'}{\Pi}=\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}}\cdot\frac{1+\alpha\tau}{1+\alpha\tau'}.$$

En multipliant cette équation par la précédente, on a le rapport des poids absolus de vapeur

$$\frac{\Pi'V'}{\Pi V}=\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{p}'-\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}{\mathfrak{P}'\mathfrak{p}-\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}.$$

Ainsi le second poids de vapeur $\Pi'V'$ sera inférieur, égal, ou supérieur au premier ΠV, suivant que $\mathfrak{P}\mathfrak{p}'$ sera inférieur, égal ou supérieur à $\mathfrak{P}'\mathfrak{p}$. Dans le premier de ces trois cas, le changement de pression et de température entraînera liquéfaction d'une partie de la vapeur ; dans le second cas, il n'y aura ni addition ni diminution de vapeur ; dans le troisième, il faudra, pour que la formule [123] soit applicable, qu'il y ait une quantité suffisante de liquide en contact avec le mélange avant son passage au second état. Si ce liquide manquait tout à fait, la formule dont il faudrait se servir serait [117]

$$\frac{V'}{V}=\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'}\,\frac{1+\alpha\tau'}{1+\alpha\tau}.$$

V. Un gaz en présence d'un liquide occupait un certain volume à la température τ et sous la pression $\mathfrak{P}$; la température devient τ' et le volume reste le même ; quelle est alors la pression $\mathfrak{P}'$?

Il suffit de faire $V = V'$ dans la formule [123], et l'on obtient

$$\mathfrak{P}' = (\mathfrak{P} - p)\frac{1 + \alpha\tau'}{1 + \alpha\tau} + p',$$

expression à laquelle on arriverait immédiatement en remarquant que la pression cherchée $\mathfrak{P}'$ se compose de deux parties, l'une p' due à la vapeur, l'autre due au gaz qui, à la température τ, soutenait la pression $\mathfrak{P} - p$.

VI. Un tube cylindrique vertical AB (*fig.* 65) ouvert par les deux bouts, et dans lequel peut se mouvoir un piston C, a son extrémité inférieure plongée dans un liquide qui supporte, autour du tube, la pression atmosphérique. Pour une certaine position du piston C, le liquide à l'intérieur du tube est au même niveau D qu'à l'extérieur, ce qui indique que la pression de l'air mélangé de vapeur saturée, dans l'espace CD, est égale à la pression atmosphérique extérieure. Cela posé, on suppose que le piston prenne une nouvelle position C', et l'on demande à quel niveau D' s'élèvera le liquide dans le tube, le niveau extérieur D restant constant.

Si l'on appelle V et V' les volumes CD, C'D' contenus dans le tube, $\mathfrak{P}$ la pression extérieure, $\mathfrak{P}'$ la pression intérieure ayant lieu à la seconde position du piston, la formule [123] s'applique ici en faisant $\tau = \tau'$ et $p' = p$, cette dernière pression étant celle de la vapeur à l'état de saturation pour la température du liquide et du tube. On a donc

$$V'(\mathfrak{P}' - p) = V(\mathfrak{P} - p),$$

ou, en posant $CD = h$, $C'D = h'$, $DD' = x$,

$$(h' - x)(\mathfrak{P}' - p) = h(\mathfrak{P} - p).$$

On a d'ailleurs [114], en appelant Π le poids d'un mètre du liquide,

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \Pi x.$$

Ces deux dernières équations ne contenant que deux inconnues, $\mathfrak{P}'$ et x, fournissent la solution du problème.

Les considérations sur lesquelles repose cette solution expliquent l'ascension d'un liquide dans un tube dont on aspire l'air avec la bouche, aspiration qui se produit par l'augmen-

tation momentanée de la capacité de la poitrine. Il est clair qu'il n'y a dans tout ce phénomène aucun fait dû à une attraction, et que l'ascension n'aurait pas lieu si le tube plongeait dans un vase plein de liquide sans communication avec l'air extérieur.

439. *Piézomètre à air comprimé.* — Quand la pression d'un fluide aériforme est tellement forte que, pour être mesurée à l'aide d'un piézomètre à air libre (421), elle exigerait un tube d'une trop grande hauteur, on fait usage d'un tube fermé par un bout et contenant un gaz qui diminue de volume en se comprimant. La fig. 66 indique une disposition de cet appareil appelé communément *manomètre à air comprimé*. La pression à mesurer s'exerce sur la surface AB du mercure, lequel s'élève à une hauteur variable dans le tube CD.

Soient, au moment de l'observation,

p la pression inconnue du gaz enfermé dans la partie DE du tube;

H la hauteur, ou plutôt le nombre de parties d'égal volume que ce gaz occupe, quantité connue;

τ la température connue du mercure et du gaz;

h la hauteur CE du mercure dans le tube au-dessus du niveau de la cuvette, hauteur mesurée en fraction du mètre, et connue.

En admettant que le gaz enfermé soit sec ou au moins ne dépose jamais de liquide, la pression p est [117] proportionnelle à $1+\alpha\tau$ et en raison inverse de H représentant le volume. On a donc, en désignant par K une constante indépendante de H et de τ,

$$p = K\frac{1+\alpha\tau}{H}.$$

La pression cherchée $\mathfrak{P}$ au niveau de la cuvette est donc (413 et 419)

$$\mathfrak{P} = K\frac{1+\alpha\tau}{H} + \left(1 - \frac{\tau}{5550+\tau}\right)\frac{h}{0,76}\,p_a.$$

Pour déterminer K, on fait, une fois pour toutes, une expérience en mettant la cuvette en communication avec l'atmosphère, et en observant au même instant un baromètre. Soient,

dans ce cas H′, h', τ', le volume du gaz, la hauteur du mercure dans l'appareil et sa température; et soit h_1 la hauteur barométrique réduite à la température *zéro* (419). On aura

$$\mathfrak{P}_a \frac{h_1}{0{,}76} = K\frac{1+\alpha\tau'}{H} + \left(1 - \frac{\tau'}{5550+\tau'}\right)\frac{h}{0{,}76}\,p_a,$$

d'où l'on tirera la valeur de K à substituer dans l'expression précédente de la pression $\mathfrak{P}$, dont le rapport à p_a sera cette pression exprimée en *atmosphères*, c'est-à-dire, en prenant pour unité la pression moyenne atmosphérique égale à 10334[kg] par mètre quarré.

Exemple :

$\tau' = 10$; $H' = 0{,}46$; $h' = 0$; $h_1 = 0{,}76$.

$\tau = 30$; $H = 0{,}30$; $h = 0{,}16$; $\mathfrak{P} = 1^{atm}, 85 = 19155^{kg}$.

§ 4. *Pression totale d'un liquide pesant homogène sur un plan.*

440. Soit ω l'aire d'une petite portion d'un plan en contact avec un liquide en repos; soit h sa hauteur au-dessous d'un plan horizontal NN dans lequel la pression du liquide est connue et désignée par $\mathfrak{P}_0$; soit Π le poids du liquide par mètre cube. La pression sur la portion ω sera (413) $\omega\mathfrak{P} + \omega\Pi h$, et les pressions sur tous les éléments du plan étant perpendiculaires à ce plan auront une résultante égale à leur somme, qui sera

$$\mathfrak{P}_0 \sum\omega + \sum \omega h.$$

Or si Ω désigne l'aire totale $\sum\omega$ pressée par le liquide, et H la hauteur de son centre de gravité au-dessous du plan du niveau NN, on a $\sum\omega h = \Omega H$ (*Géom. anal.*, 307), et la pression totale devient $\Omega\,(\mathfrak{P}_0 + \Pi H)$.

$\Pi\Omega H$ est le poids d'un prisme droit du liquide, qui aurait pour base Ω, et pour hauteur H.

441. Lorsqu'il s'agit de la pression d'un liquide homogène ayant une surface en contact avec l'atmosphère, la hauteur H est comptée au-dessous de cette surface, et la pression $\mathfrak{P}_0$ est déterminée par l'observation du baromètre.

Si la paroi plane pressée d'un côté par le liquide a sa face opposée, égale et parallèle, en contact avec l'atmosphère, on n'a ordinairement pour but que de calculer la différence des pressions sur les deux faces, et l'on considère comme constante la pression atmosphérique sur la surface supérieure du liquide et sur la face extérieure de la paroi : cette différence est donc $\Pi\Omega H$, résultante des seules pressions dues au poids du liquide.

Il est remarquable que cette pression totale est indépendante des dimensions horizontales et du volume du liquide.

442. La résultante $\Pi\Omega H$ de forces normales au plan pressé perce ce plan en un point appelé *centre de pression;* et ce point est situé au-dessous du centre de gravité de la surface.

En effet, si par la pensée on rend cette paroi horizontale en la faisant tourner autour d'un axe horizontal tracé dans son plan par le centre de gravité, la pression totale n'est pas changée, puisqu'elle est toujours $\Pi\Omega H$, et la résultante passe alors par le centre de gravité, puisque dans ce cas les pressions sur des éléments égaux du plan sont égales. Or, si l'on ramène la paroi à sa position inclinée, les pressions partielles sur la partie supérieure de la paroi sont diminuées, ainsi que leurs moments par rapport à l'axe de rotation; le contraire a lieu dans la partie inférieure; donc, d'égales qu'elles étaient, les sommes des moments sont devenues inégales, la première plus petite que la seconde, et la résultante passe au-dessous de l'axe.

443. La position du centre de pression d'un liquide sur une paroi plane se trouve par le calcul, en appliquant la théorie de la composition des forces parallèles. Nous nous bornerons au cas où le liquide est homogène.

Dans la figure 67, dont le plan est supposé vertical et perpendiculaire à la paroi pressée, représentons par NN le plan horizontal dans lequel la pression du liquide est considérée comme nulle.

Soit AB la projection ou trace verticale de la paroi, et soit I l'intersection de son plan prolongé avec le plan de niveau NN.

Soit C le centre de pression, et supposons qu'on demande sa distance AC à l'axe horizontal projeté en A. Décomposons la surface AB en bandes horizontales infiniment petites, telles que celle qui se projette en MM_1. Appelons z la distance verticale Mm ; x la distance AM ; dx par conséquent la largeur de la bande MM_1 ; y la longueur de cette bande dans le sens horizontal perpendiculaire au plan de la figure. La pression sur la surface ydx est $\Pi zydx$, et son moment par rapport à l'axe A est $\Pi zyxdx$; si donc nous représentons par x' la distance AC, nous aurons (366), en prenant les moments des pressions par rapport à l'axe A,

$$x'\int \Pi zydx = \int \Pi zyxdx, \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{\int zyxdx}{\int zydx}.$$

En représentant la distance AI par c, et l'angle NIA par α, on a $z = (c+x)\sin\alpha$, et la formule précédente devient, par la suppression du facteur constant $\sin\alpha$,

$$x' = \frac{\int (cx + x^2)ydx}{\int (c+x)ydx}. \qquad [124]$$

Il ne reste plus qu'à substituer pour y son expression en fonction de x, et à exécuter les intégrations dans les limites de la surface pressée.

Supposons, par exemple, que cette surface soit un trapèze dont les bases soient horizontales. Représentons par a la base projetée en A, par b celle qui se projette en B, par l la hauteur AB du trapèze ; nous aurons (*Géom. anal.*, 92)

$$y = a + \frac{b-a}{l}x.$$

En substituant cette expression dans la formule de x', et en effectuant ensuite les intégrations depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, on trouve

$$x' = \frac{l^2(a+3b) + 2lc(a+2b)}{2l(a+2b) + 6c(a+b)}. \qquad [125]$$

Lorsque la base supérieure A est au niveau supérieur du liquide, c est nul, et l'on a

$$x' = \frac{l(a + 3b)}{2(a + 2b)}. \qquad [126]$$

Si la paroi est un triangle ayant sa base à fleur d'eau, il faut faire $c = 0$ et $b = 0$, d'où

$$x' = \frac{l}{2}. \qquad [127]$$

Si c'est un triangle ayant son sommet à fleur d'eau, on fait $c = 0$ et $a = 0$, d'où.

$$x' = \frac{3}{4}\,l. \qquad [128]$$

Lorsque la paroi est un parallélogramme ayant deux côtés horizontaux, il faut dans la formule [125] faire $a = b$, ce qui donne

$$x' = \frac{2l^2 + 3cl}{3(l + 2c)}. \qquad [129].$$

Enfin si, dans ce dernier cas, le côté horizontal supérieur est à fleur d'eau, on a $c = 0$, et

$$x' = \frac{2}{3}\,l. \qquad [130]$$

444. La recherche du centre de pression d'un liquide sur une paroi plane peut se ramener à celle du centre de gravité d'un volume. La pression supportée par la bande MM_1 est égale en intensité au poids d'une tranche de liquide $MM_1m_1'm'$, qui aurait pour base le rectangle projeté en Mm' et égal à yz, et pour épaisseur infiniment petite la longueur MM_1 ou dx. En étendant à toute la paroi AB cette observation, on voit:

1° Que la pression totale, somme des pressions élémentaires sur cette paroi, est égale au poids du prisme ou cylindre droit tronqué $ABb'a'$, qui aurait pour base inférieure la paroi AB, et sa base oblique supérieure dans le plan $a'b'$ tellement dirigé que l'on ait les perpendiculaires à la paroi, Aa' et Bb', égales aux verticales Aa et Bb; d'où il suit qu'une perpendiculaire quelconque Mm' est égale à la verticale correspondante Mm, et que le plan $a'b'$ passe par I.

2° Que la résultante de ces pressions passe par le centre de gravité G′ du même cylindre ou prisme tronqué, et que, par conséquent, le centre de pression C est la projection rectangulaire, sur la paroi, de ce même centre de gravité G′.

Il est facile de voir que le centre de pression C est sur la verticale passant par le centre de gravité G du prisme ou cylindre tronqué à arêtes verticales A*ab*B, ayant pour l'une de ses bases la paroi AB, et sa base supérieure dans le plan horizontal NI du liquide.

A l'aide de cette considération, on retrouve immédiatement les quatre formules de [127] à [130], et l'on peut aussi obtenir graphiquement le centre de pression, dans le cas où la paroi AB est un parallélogramme, en remarquant que les centres de gravité G′, G ont les mêmes projections dans la figure 66 que ceux des trapèzes AB*b′a′*, AB*ba*.

445. Il est facile de voir que lorsque les deux faces d'une cloison sont pressées par deux portions distinctes d'un même liquide, dont les surfaces libres en contact avec l'atmosphère sont maintenues des deux côtés à des niveaux différents, la différence des pressions par mètre quarré sur ces deux faces est constante; elle est égale au poids Π du mètre cube de liquide multiplié par la différence de niveau, abstraction faite de la légère variation de la pression atmosphérique sur les deux surfaces libres.

§ 5. *Pression d'un fluide sur une surface courbe.*

446. Théorème. La pression $\mathfrak{P}\omega$ d'un fluide sur un élément superficiel quelconque dont l'aire est ω, a pour projection, sur un axe Ox quelconque, une force égale à la pression $\mathfrak{P}\omega'$ que supporterait au même point, un élément égal à la projection ω' de l'élément superficiel sur un plan yOz perpendiculaire à l'axe Ox. En effet, si l'on appelle α l'angle de la normale à l'élément ω, avec l'axe Ox, la projection de la pression $\mathfrak{P}\omega$ est $\mathfrak{P}\omega \cos\alpha$, et $\omega\cos\alpha = \omega'$, parce que α est aussi l'angle de l'élément ω avec le plan yOz (*Géom. anal.*, 328).

Cette propriété se démontrerait directement d'une manière

analogue à la démonstration du n° 411, en considérant l'équilibre d'un petit cylindre tronqué fluide qui aurait pour première base l'élément ω, ses génératrices parallèles à Ox, et pour seconde base l'élément ω' à une petite distance de l'autre.

447. Corollaire I. Si le fluide qui s'appuie sur une surface courbe est à une pression constante (ce qu'on peut admettre approximativement pour un gaz de peu d'étendue), la somme algébrique des projections, sur un axe Ox, des pressions élémentaires supportées par cette surface est égale à la pression que supporterait en contact avec le même fluide une surface plane égale à la projection de la surface courbe sur un plan yOz perpendiculaire à Ox. Il doit être entendu que lorsque les parallèles à l'axe Ox rencontrent deux fois la surface pressée, les projections des pressions, comme les projections des éléments superficiels où cette rencontre a lieu, se détruisent. Par exemple, la résultante des pressions sur une calotte sphérique est égale à la pression que supporterait sa base plane, même dans le cas où la calotte excède l'hémisphère; la résultante des pressions sur une portion de surface cylindrique à base circulaire qui, développée, deviendrait un rectangle, est égale à la pression que supporterait le rectangle compris entre les deux génératrices extrêmes, même dans le cas où la surface embrasse plus d'une demi-révolution.

448. Corollaire II. Lorsqu'on a égard à l'action de la pesanteur sur le fluide liquide ou gazeux qui s'appuie contre une portion de surface courbe, la même propriété a encore lieu, pourvu que l'axe Ox soit horizontal.

449. Corollaire III. Dans la même hypothèse du fluide pesant, liquide ou gazeux, la pression normale sur un élément superficiel quelconque a pour projection verticale une force égale au poids du cylindre fluide vertical tronqué, ayant pour base inférieure l'élément superficiel, et ayant sa base supérieure au niveau où la pression est nulle; ce cylindre étant d'ailleurs composé de couches homogènes avec celles qui composent le fluide pesant.

450. On explique aisément par ces considérations le fait appelé paradoxe hydrostatique, qui consiste en ce que la pression

d'un liquide, sur le fond d'un vase non cylindrique, est tantôt plus grande, tantôt plus petite que le poids du liquide contenu dans le vase.

§ 6. *Équilibre des corps plongés ou flottants.*

451. Lorsqu'un corps est plongé en totalité ou en partie dans un liquide pesant, en repos, qui entoure complétement la partie immergée, les pressions que ce fluide exerce normalement à la surface du corps ont une résultante unique passant par le centre de gravité du fluide déplacé, et égale, mais directement opposée au poids de ce même fluide. Cela résulte des nos 448 et 449; mais cela se reconnaît aussi *à priori*, car rien ne serait changé aux pressions si le corps plongé était remplacé par le fluide qu'il déplace, et alors la proposition serait une conséquence des principes de la Statique. Il est bien entendu que le fluide environnant est en contact avec toute la surface qui limite le corps considéré au-dessous du plan de niveau où cesse le fluide. Celui-ci peut d'ailleurs être composé de couches horizontales de diverses densités; mais alors il faut prolonger par la pensée ces couches dans l'intérieur de la partie immergée, pour avoir le poids du fluide déplacé et son centre de gravité. La résultante des pressions du fluide sur le corps qui y est immergé s'appelle improprement *la perte de poids du corps due à son immersion.*

Comme les composantes horizontales des pressions élémentaires se font séparément équilibre (448), la résultante de toutes ces pressions peut être considérée comme se réduisant à la résultante de leurs composantes verticales, c'est-à-dire, à une résultante de forces parallèles. Par cette raison, le centre de gravité du fluide déplacé par le corps immergé peut s'appeler le *centre des pressions* que ce corps supporte.

452. Une conséquence immédiate de la proposition qui vient d'être établie, c'est que pour l'équilibre d'un corps entièrement plongé dans un liquide homogène, il faut :

1° Que son poids soit égal à celui d'un volume égal de liquide;

2° Que le centre de gravité du corps et celui de son volume soient sur une même verticale.

Quant à la seconde condition, il y a une distinction importante à faire. Lorsque le centre de gravité G du corps solide (*fig.* 68*a*) est au-dessous du centre de pression C, l'équilibre est *stable*, ce qui signifie que si, par une cause quelconque, le corps solide est momentanément incliné (*fig.* 68*b*), et ensuite abandonné, sans vitesse initiale, à l'action de la pesanteur et à celle des pressions du liquide environnant, ces forces tendent à le ramener à la position d'équilibre dont il s'agit. En effet, puisque le corps est solide, on peut (402), sans rien changer à son mouvement, remplacer les forces auxquelles il est soumis par leurs résultantes, savoir, la force P représentant son poids, appliquée au centre de gravité G, et la force R verticale ascendante, égale à P, mais appliquée au point C. La résultante de translation de ces deux forces étant nulle, le centre de gravité G reste immobile (283); mais en vertu de la force R (408) le corps tourne autour de ce point G, vers la position où C est verticalement au-dessus de G.

Dans le cas où, au contraire, le centre de pression C serait verticalement au-dessous du centre de gravité G (*fig.* 68*c*), l'équilibre serait *instable*, c'est-à-dire que si le corps venait à être tant soit peu incliné (ce qui est inévitable dans la pratique), et était ensuite abandonné aux seules forces P et R, il tournerait en s'écartant de plus en plus de la position d'équilibre primitive, pour prendre la position opposée.

453. Pour l'équilibre d'un corps flottant, c'est-à-dire, incomplétement plongé dans un liquide, il faut 1° que son poids soit égal à celui du liquide déplacé; 2° que le centre de gravité du corps et le centre de pression soient sur une même verticale. L'équilibre est encore stable si le centre de gravité est au-dessous du centre de pression; mais cette condition toujours suffisante n'est pas nécessaire. Un exemple simple va démontrer cette vérité.

Soit ABCD (*fig.* 69) un corps solide terminé par une surface cylindrique de révolution dont l'axe est horizontal. Il est enfoncé dans un liquide dont la surface libre est dans le plan

AC appelé plan de flottaison. Le lest fixé vers B fait que le centre de gravité du corps flottant est en G, plus bas que l'axe O. Le centre de gravité du volume du liquide déplacé, et par conséquent le centre de pression, est en G′. Dans la situation d'équilibre (*fig.* 69*a*), le poids du corps solide est égal à celui du liquide qu'il déplace, et les deux centres de gravité G, G′, sont sur une même verticale passant par l'axe O. Maintenant, si l'on incline le corps par une petite force de manière qu'il ne s'enfonce pas davantage, la droite BD, primitivement verticale, devenant inclinée (*fig.* 69*b*), contient toujours le point G, centre de gravité du corps flottant, tandis que le centre de gravité du liquide déplacé est en G'_1, sur la verticale passant par l'axe O.

Dans cet état, le corps étant soumis à deux systèmes de forces, dont les unes, constituant le poids du corps flottant, ont une résultante verticale de haut en bas, passant par G, et les autres, qui sont les pressions du liquide, ont aussi une résultante verticale, mais de bas en haut, et passant par G'_1, il s'ensuit que le corps flottant tend à tourner et à revenir à sa première position. On voit qu'il suffit pour cela que le centre G soit au-dessous de l'axe O, quoique supérieur au centre G′. Au reste, plus le point G sera bas, plus le corps tendra à revenir rapidement à la position d'équilibre.

454. Considérons maintenant un cylindre droit à base de figure quelconque (*fig.* 70) qui flotte en ayant ses arêtes horizontales. Si on le fait tourner en satisfaisant toujours à cette condition et de manière que la quantité de liquide déplacée reste la même, quoique son volume change de forme, le centre de gravité G′ de ce volume décrit, par rapport au corps flottant, une courbe $G'G'_1$ qui n'est plus un arc de cercle comme dans le cas précédent, mais qui jouit d'une propriété remarquable : c'est que dans chaque position du corps flottant, cette courbe a sa tangente horizontale au point même où se trouve actuellement le centre de gravité du liquide déplacé. En effet, soit AB le plan de flottaison auquel correspond la position G′ de ce centre de gravité, si l'on veut avoir un autre point de la courbe voisin de celui-là, il faut considérer un au-

tre plan de flottaison A_1B_1 tellement situé que l'aire A_1DB_1 soit égale à l'aire ADB, et que par conséquent l'aire BCB_1 soit égale à l'aire ACA_1; or il s'ensuit nécessairement que le centre de gravité G'_1 du volume A_1DB_1 sera au-dessus de G'H parallèle à AB et actuellement horizontale; et cette conclusion est indépendante de la situation du point G'_1 à droite ou à gauche du point G'. Donc G'H est la tangente en G', et la verticale G'V est la normale en ce même point à la courbe $G'G'_1$.

Cela posé, imaginons que la courbe $G'G_1$ soit tracée aux environs du point G' correspondant à la position d'équilibre du corps flottant, et désignons par M le centre de courbure de cette courbe pour le même point G' (*Géom. anal.*, 260). Ce centre de courbure M s'appelle le *métacentre* du corps flottant, et joue un rôle analogue à celui du centre du cylindre à base circulaire considéré au n° précédent. En effet, dans la position d'équilibre (*fig.* 70*a*), la verticale G'M doit contenir le centre de gravité G du corps flottant, et si ce corps s'incline infiniment peu, par exemple vers la droite (*fig.* 70*b*), la verticale passant par le nouveau centre de pression G'_1 passe infiniment près de M, et pour que le corps tende à revenir à sa position d'équilibre, *il suffit*, comme le montre la figure 70 *b*, *que le centre de gravité* G *soit au-dessous du métacentre* M, sans qu'il y ait nécessité qu'il soit au-dessous du centre de pression G'.

455. *Remarque sur la condition essentielle de l'immersion.* Pour que les propriétés mentionnées dans ce paragraphe soient réalisées, il faut que la surface qui termine le corps au-dessous d'un certain plan soit tout entière en contact avec le fluide considéré. Quand cette condition n'est pas remplie, il faut traiter les questions relatives aux pressions d'après les théorèmes énoncés aux paragraphes 4 et 5. Cette observation s'applique à divers genres de soupapes.

§ 7. *Du calcul de la hauteur des montagnes d'après les observations barométriques.*

456. Lorsque l'atmosphère est en repos relativement à la

terre, la pression qu'elle exerce en un lieu déterminé, sur une surface d'un mètre quarré, est égale au poids d'une colonne cylindrique verticale d'air, ayant un mètre quarré de section droite, et s'élevant depuis le point dont il s'agit jusqu'à la limite supérieure de l'atmosphère; pour parler avec plus de précision, cette pression est la résultante de l'attraction totale de la terre sur la colonne ainsi définie, et des forces centrifuges qu'il faut appliquer à ses éléments pour pouvoir la considérer comme étant en équilibre (265 et 297). La pression atmosphérique en un lieu est immédiatement connue au moyen du baromètre, et il est clair que si on l'observe en deux points situés à des niveaux différents, la valeur obtenue à la station supérieure sera plus petite que l'autre, et de plus en plus petite à mesure que cette station sera plus élevée. De là l'idée de se servir du baromètre pour trouver la différence de niveau des deux lieux d'observation.

Si le poids de l'air par unité de volume était constant, comme si c'était un liquide d'une médiocre étendue, en appelant Π ce poids, z la différence de niveau de deux points de l'atmosphère, $\mathfrak{P}_0$ la pression par unité de surface au point inférieur, $\mathfrak{P}_1$ la pression au point supérieur, h_0 et h_1 les hauteurs barométriques correspondantes ramenées à la température zéro (419), Π_m le poids de l'unité de volume du mercure à cette température, on aurait (413 et 419) les relations

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_1 + \Pi z, \quad \mathfrak{P}_0 = \Pi_m h_0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}_1 = \Pi_m h_1;$$

d'où

$$z = \frac{\Pi_m}{\Pi}(h_0 - h_1).$$

En mettant pour Π_m sa valeur 13598^{kg}, si l'on adoptait, par exemple, pour Π le poids de l'air sec, sous la pression moyenne atmosphérique et à la température *zéro*, poids qui est de $1^{kg},300$, on trouverait qu'à chaque millimètre de différence de hauteur barométrique $(h_0 - h_1)$ répondrait une différence de niveau z de $10^m,46$. En faisant dans la même formule $h_1 = 0$ et $h_0 = 0,76$, on trouverait que la hauteur totale de l'atmosphère serait de $10460 \times 0,76$ ou 7950^m.

457. Mais l'hypothèse à laquelle nous venons de nous arrê-

ter un moment, est trop loin de la vérité pour conduire à des résultats approximatifs, si ce n'est dans le cas de petites différences de niveau. Dans toute autre circonstance, il faut avoir égard, comme nous allons le faire, à la variation de densité de l'air, par suite du changement de pression et de température. Nous négligerons seulement la variation de la pesanteur due à l'accroissement de la distance au centre de la terre et à l'augmentation de la force centrifuge ; ce qui est admissible quand les hauteurs au-dessus du niveau de la mer ne sont pas très-considérables, et ce qui, dans tous les cas, n'entraîne qu'une faible erreur.

Soit M un point situé dans l'atmosphère à une distance z au-dessus d'un point O pris pour origine des hauteurs. Désignons par $\mathfrak{P}$ la pression par mètre quarré en ce point : cette quantité est une fonction de z qu'il s'agit de déterminer. A cet effet, prenons un point M' supérieur à M, et infiniment voisin ; appelons par conséquent dz la distance verticale MM'. La pression en M' est $\mathfrak{P} + d\mathfrak{P}$, la différentielle $d\mathfrak{P}$ étant négative. L'air pouvant être considéré comme homogène dans ce petit intervalle, nous aurons (413)

$$d\mathfrak{P} = -\Pi dz,$$

en désignant par Π le poids de l'air rapporté au mètre cube dans la tranche MM', ou au point M, sauf une différence qui disparaît à la limite. Cette quantité est, suivant la formule [120], une fonction de la pression $\mathfrak{P}$, de la température τ, et de la densité tabulaire du gaz, laquelle varie suivant la quantité de vapeur d'eau que contient l'atmosphère au point considéré. Pour simplifier, on suppose cette densité tabulaire constante ; mais attendu que l'atmosphère contient d'autant plus d'eau que sa température est plus élevée, ce qui diminue son poids par unité de volume, toutes choses égales d'ailleurs, on a égard à cette circonstance en augmentant un peu le coefficient de dilatation α, et le faisant, d'après Laplace, égal à 0,004.

On peut ainsi poser, en désignant par k une constante convenable,

$$\Pi = \frac{\mathfrak{P}}{k(1 + 0{,}004\tau)},$$

et par conséquent

$$d\mathfrak{P} = -\frac{1}{k(1+0{,}004\tau)}\mathfrak{P}dz, \quad \text{ou} \quad dz = -k(1+0{,}004\tau)\frac{d\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}}.$$

Pour intégrer cette équation, il faudrait connaître la loi suivant laquelle la température τ varie soit avec la hauteur z, soit avec la pression. Faute de cette connaissance, on substitue à la température variable une température constante, moyenne arithmétique entre celles τ_0 et τ_1 qui ont lieu aux deux points dont il s'agit d'obtenir la différence de niveau. Ainsi l'on fait $\tau = \frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_1)$. Dès lors l'intégration de la dernière équation différentielle donne, en appelant Z cette différence de niveau, $\mathfrak{P}_0$ la pression au point inférieur, $\mathfrak{P}_1$ la pression au point supérieur,

$$Z = 2{,}3026k[1 + 0{,}002(\tau_0 + \tau_1)]\log\frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_1}. \qquad [131]$$

Le rapport $\frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_1}$ est égal, quand on néglige la variation de la pesanteur, au rapport des hauteurs barométriques ramenées à une même température (419); de sorte que si l'on appelle h_0 et h_1 les hauteurs du baromètre aux deux stations, et si l'on désigne par T_0 et T_1 les températures du mercure à l'instant de l'observation, on a

$$\frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_1} = \frac{h_0(5550 + T_1)}{h_1(5550 + T_0)}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer, dans la formule [131], la constante k, et c'est ce qu'on peut faire très-approximativement par le calcul. En supposant l'air sec à la température *zéro*, pesé à la surface de la terre et à la latitude de Paris, on aurait

$$\Pi = 1{,}300 = \frac{10334}{k}, \text{ d'où } k = \frac{10334}{1{,}3}, \text{ et } 2{,}3026k = 18304.$$

Mais des observations trigonométriques et barométriques faites par M. Ramond dans le midi de la France ont fait connaître que, pour cette latitude, le coefficient numérique de la formule [131] devait être 18393, et que, par cette augmenta-

tion, on rectifiait avec l'exactitude désirable les légères erreurs de la théorie précédente. La formule devient donc

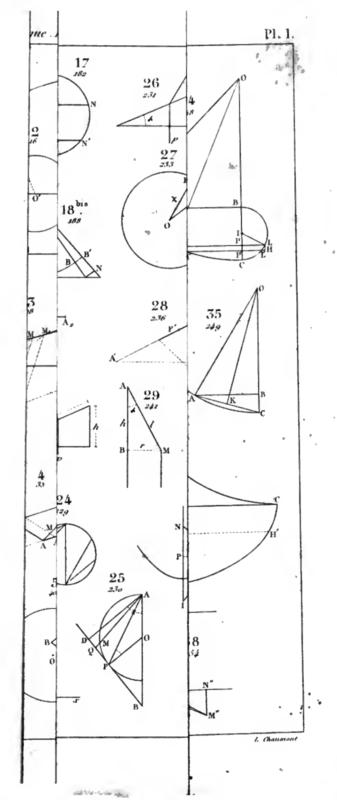
$$Z = 18393[1 + 0{,}002(\tau_0 + \tau_1)]\log\frac{h_0(5550 + T_1)}{h_1(5550 + T_0)}.$$

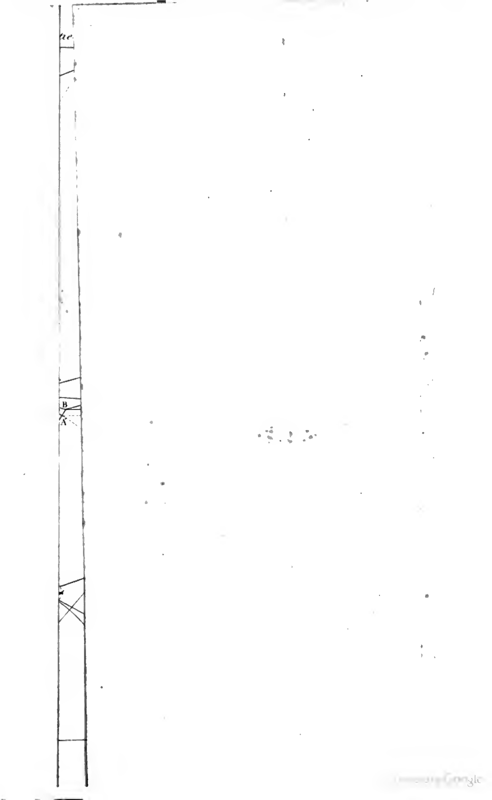
FIN DE LA 4e SECTION ET DE LA 1re PARTIE DE CE COURS.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.




17
182
26
231
27
233
18 bis
188
28
236
35
249
29
241
4
24
129
25
230
8
54
N
N'
O'
B
B'
O
I
P
L
H
C
K
A
M
h
l
r
Q
D
N''
M''
H'


B
A


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI

